CENTRO DE INVESTIGACIÓN AVANZADA EN EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE CHILE

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FINAL ABIERTO

EN CLASES DE MATEMÁTICA

La experiencia de los profesores participantes en el proyecto bilateral Chile – Finlandia "Desarrollo de competencias matemáticas a través de la resolución de problemas de final abierto" AKA 09

Centro de Investigación Avanzada en Educación
Universidad de Chile

Resolución de problemas de final abierto en clases de matemática

ISBN
Registro de propiedad Intelectual N°
Centro de Investigación Avanzada en Educación
Universidad de Chile
Periodista José Carrasco Tapia N°75, Santiago de Chile.
Tel. 2978 2762
Contacto: pauaraya@ciae.uchile.cl

Coordinación General: Paulina Araya, María Leonor Varas
Corrección de textos: Catalina Caro
Diseño y diagramación: Hernando Acevedo
Impresión: Maval Editora e Impresora

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Este es un libro de profesores para profesores que recoge la experiencia acumulada en un proyecto que introdujo la resolución de problemas de final abierto en clases de matemática, con el fin de traspasarla a otros interesados y motivar a que más profesores utilicen lo que aprendimos a lo largo de tres años.

El mencionado proyecto corresponde a una iniciativa bilateral Chile – Finlandia, financiado conjuntamente por la Academia de Finlandia y CONICYT (Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica) de Chile bajo la clave AKA09 y el nombre "Desarrollo de la comprensión matemática y del desempeño a través de la resolución de problemas de final abierto". En este marco, los equipos de investigación de la Universidad de Chile y de la Universidad de Helsinki (Finlandia) construyeron y seleccionaron problemas "de final abierto" que luego fueron utilizados en clases de matemática por 13 profesores chilenos y 10 profesores finlandeses con sus cursos de Enseñanza Básica. El proyecto partió cuando los niños iniciaban el 3º básico y concluyó cuando estos mismos niños terminaban el 5º básico. Los profesores participantes continuaron con estos cursos durante el desarrollo del proyecto, al menos impartiendo la asignatura de matemática. A lo largo de esos tres años, aproximadamente una vez al mes (siete veces en el año) se dedicó la clase de matemática a la resolución del problema de turno, lo que se planificaba previamente en conjunto por todos los profesores participantes y el equipo de investigación. Luego se filmaba la realización de la clase y se recogían los trabajos de los alumnos, para su análisis posterior en la reunión donde se planificaba la implementación del siguiente problema.

De este modo, se postula, que los niños desarrollarían una comprensión más profunda de la matemática estudiada a ese nivel escolar, mayores destrezas en la resolución de problemas, mayor confianza en sus capacidades y mayor creatividad para trabajar matemáticamente, además de ampliar y enriquecer sus ideas acerca de la matemática, su enseñanza y su aprendizaje. Los profesores, por su parte, también cambiarían sus ideas respecto de estos temas, ampliarían y enriquecerían su repertorio de prácticas pedagógicas, además de desarrollar mayores capacidades para escuchar a sus alumnos y seguir sus pensamientos, lo que les llevaría a elevar sus expectativas respecto de las capacidades de sus alumnos.

Con el fin de testear estas hipótesis se aplicaron varios instrumentos de evaluación y diagnóstico al comienzo y al final del proyecto, a alumnos y profesores participantes y a un grupo de profesores y alumnos de cursos paralelos a los cursos participantes. Estos últimos constituyen así un grupo de control para efectos de la investigación. Los instrumentos aplicados incluyen encuestas para los alumnos y para los profesores, además de test de matemática y dibujos de su clase de matemática para los estudiantes. La recolección de los datos de término del proyecto se realizó paralelamente a la edición de este libro, por lo que no pudimos informar aquí de los resultados de esa investigación.

Los profesores participantes han elaborado su experiencia en reuniones y entrevistas, además de su contribución a este libro. Ellos, al igual que los equipos de investigación de ambos países, reconocen los positivos cambios y se entusiasman con la posibilidad de propagarlos.

La clase de matemática que se dedica a resolver un problema de final abierto no pretende el aprendizaje de contenidos sino el desarrollo de competencias. Si bien esto es un aporte crucial a la educación matemática, no podemos desconocer la necesidad de cubrir un currículum escolar de contenidos que se han establecido por ley a nivel nacional. Así, promovemos con gran convicción y entusiasmo la realización de clases centradas en los problemas presentados en este libro, pero no proponemos que ellas reemplacen la enseñanza de los contenidos curriculares, ni que toda esa enseñanza se realice a través de la resolución de problemas.

Advertimos también que a juicio del equipo de este proyecto, la planificación conjunta de cada clase de resolución de problemas, a cargo del grupo de profesores participantes, es una condición muy importante para el exitoso desarrollo de estas clases. De este modo, el libro que estamos poniendo en sus manos no es un material suficiente para producir los desarrollos anunciados, aunque es una poderosa herramienta que necesita ser usada colectivamente entre colegas que planifican y reflexionan juntos.

Por diversos motivos no todos los profesores que participaron en el proyecto llegaron a la etapa final de construcción de este libro: una escuela cerró, una profesora jubiló, otros profesores asumieron responsabilidades mayores en sus escuelas o colegios. Sin embargo, el conocimiento que se ha volcado en él fue desarrollado paso a paso en el trabajo colectivo de planificación y discusión mensual a lo largo de tres años. Se detallan sus nombres, en dos listas distintas: participantes y autores, para dar los créditos correspondientes a cada aporte. El mayor trabajo de recopilación de las experiencias y de redacción de este libro lo realizó Paulina Araya, miembro del equipo de investigación, quien grabó junto a Alex Fuentealba todas las clases de resolución de problemas. Ellos son quienes mejor conocen la ejecución de este proyecto en las aulas.

Esta es la primera versión de un libro que en el futuro tendrá también los testimonios y aportes de los profesores finlandeses que implementaron estos mismos problemas en escuelas de Helsinki, en condiciones tan distintas y sin embargo con tantos desafíos comunes. Esa nueva versión del libro se enriquecerá además con las experiencias de su uso en talleres en los que los profesores autores enseñarán a otros profesores a planificar clases de matemática en torno a estos problemas de final abierto.

Este libro no es un libro de lectura. Es un material de apoyo para introducir nuevas formas de trabajar matemáticamente en clases de matemática de Enseñanza Básica, escrito por quienes se convirtieron en maestros en esta técnica, aquellos que lo hicieron con éxito y perseverancia, con la humildad y la valentía de quienes aprenden, descubren, cambian y comparten.

Es para mí un honor presentarlos.

Leonor Varas

Investigadora CIAE
Profesora de la U. de Chile y Directora del proyecto en Chile

Proyecto *“Desarrollo de la comprensión matemática y del desempeño a través de la resolución de problemas de final abierto”.*

Equipo de Investigación chileno:

María Leonor Varas (Directora en Chile)
Patricio Felmer
Salomé Martínez
Alejandro López
Paulina Araya
Alex Fuentealba

Equipo de Investigación finlandés:

Erkki Pehkonen
Markku Hannula
Liisa Näveri
Maija Ahtee
Annu Laine

Profesores chilenos participantes:

Denisse Torres Morales	Escuela Básica Grenoble. Quinta Normal, Santiago.
Juan Fernández Díaz	Escuela Básica Grenoble. Quinta Normal, Santiago.
Nancy Alegría Cortés	Escuela Gran Avenida. San Miguel, Santiago.
Domingo Alfaro Riquelme	Escuela Básica Calicanto . Quinta Normal, Santiago.
Luzmira Troncoso Reveco	Escuela Básica Calicanto. Quinta Normal, Santiago.
Silvia Cepeda Donoso	Escuela Básica Lo Franco. Quinta Normal, Santiago.
Cecilia Maldonado Méndez	Escuela Básica Lo Franco. Quinta Normal, Santiago.
Marcela Fernández Castro	Escuela Elvira Hurtado de Matte. Quinta Normal, Santiago.
Pamela Méndez Pastrián	Escuela Francisco Andrés Olea. Santiago, Santiago.
Manuel Díaz Glaves	Escuela Básica Inglaterra. Quinta Normal, Santiago.
Jessica Núñez Godoy	Escuela Básica Inglaterra. Quinta Normal, Santiago.
Viviana Reyes Benavides	Escuela Luna Nueva. La Pintana, Santiago.
Velia Ibacache Celedón	Escuela Básica Platón. Quinta Normal, Santiago.

Profesores autores:

Denisse Torres Morales
Juan Fernández Díaz
Nancy Alegría Cortés
Domingo Alfaro Riquelme
Luzmira Troncoso Reveco
Silvia Cepeda Donoso
Cecilia Maldonado Méndez
Marcela Fernández Castro
Pamela Méndez Pastrián
Manuel Díaz Glaves
Jessica Núñez Godoy

Problema 1:

LOS PASTELES

Nivel en que fue implementado: 3º Básico

Enunciado

Una canasta de pasteles cuesta $2.000. ¿Qué formas diferentes tienes para pagar los pasteles con una cantidad justa de monedas y/o billetes?.

Indica la cantidad de billetes y/o monedas que necesites.

Objetivos

I. Desarrollar comprensión y destreza matemática.
Se espera que los y las estudiantes logren:

- Mostrar distintas soluciones de cómo pagar $2.000 usando monedas y/o billetes chilenos.
- Elaborar estrategias que les permitan generar muchos resultados y conseguir comunicarlas.
- Desarrollar una manera de representar sus resultados de forma clara y eficiente.

II. Fomentar la creatividad.

Hallar soluciones a este problema no representa un desafío muy complejo, se involucran más bien conocimientos aritméticos sencillos. Sin embargo, la manera que los niños y niñas desarrollan para representar las respuestas sí genera un desafío mayor que promueve la creatividad de los estudiantes. Más aún, el hecho de inventar una estrategia para obtener la mayor cantidad de respuestas, basado en un ordenamiento de las cantidades usadas, representa un objetivo cuyo desarrollo implica la creatividad y el ingenio de los alumnos.

III. Desarrollar confianza en su capacidad de hacer matemática.

Este problema tiene un grado de dificultad sencillo y complejo a la vez, lo que permite que todos los estudiantes se sientan con posibilidades y ganas de participar, por un lado los alumnos que tengan mayores dificultades podrán aportar con soluciones y eso será un logro, mientras los más avanzados podrán intentar llegar más allá en sus conjeturas y modos de representación.

Instrucciones

Entregar la hoja con el enunciado a todos los estudiantes y explicar el problema. Las primeras respuestas que dan los niños pueden servir para ejemplificar lo que se pide.

Incentivar el trabajo haciendo énfasis en los modos de representación. Explicar que para obtener muchas soluciones deben encontrar maneras de representar sus respuestas que sean adecuadas y sencillas.

Ayudar a los estudiantes con mayores dificultades valorando sus respuestas y motivándolos a obtener más.

Incentivar a los estudiantes más avanzados a crear estrategias que permitan generar muchas respuestas.

Descripción de la clase

La profesora Denisse comienza su clase entregando la hoja con el enunciado a cada alumno y, entre todos, leen el problema. La instrucción es corta y precisa. Pide que algún estudiante dé ejemplos y rápidamente surgen respuestas: “con dos billetes de mil”, “con cuatro monedas de quinientos”. Denisse pregunta al curso si los ejemplos entregados son correctos y el curso está de acuerdo.

La profesora pregunta ¿cómo van a escribir esas respuestas en la hoja? Los niños perciben que además de encontrar la respuesta deben escribirla, para lo cual tienen que elegir algún modo de representar lo que acaban de responder.

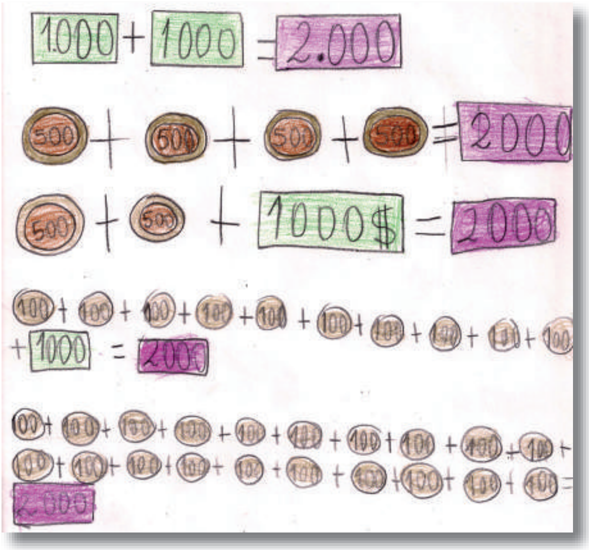
Denisse hace un repaso breve sobre los tipos de monedas y billetes que se emplean en Chile, esto fue acordado previamente en la planificación conjunta que realizaron los profesores participantes en el proyecto antes de implementar cada problema, pues los alumnos son pequeños y podrían no saber.

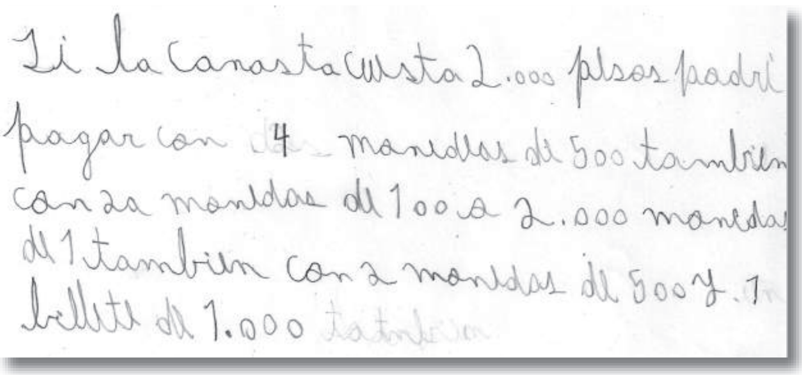
Algunos niños hacen dibujos de los billetes y las monedas empleadas en cada respuesta, otros escriben con sumas el valor del billete o la moneda que están empleando. Todos los alumnos generan soluciones, algunos de forma más veloz y otros tomándose más tiempo, lo cual está, sin duda, relacionado con el modo de representación que han elegido.

La profesora Denisse estimula a los estudiantes a seguir buscando soluciones, les pregunta cuántas respuestas llevan y les permite mostrar sus soluciones en la pizarra cuando desean hacerlo, esto los impulsa a seguir trabajando y no abandonar el objetivo.

Al final de la clase todos los estudiantes han aportado con soluciones. Algunos han hecho trabajos muy minuciosos dibujando de manera atractiva sus resultados, otros en cambio prefieren emplear modos de representación abreviados y logran escribir muchas respuestas.

A continuación se muestran algunos de los trabajos realizados por los niños:

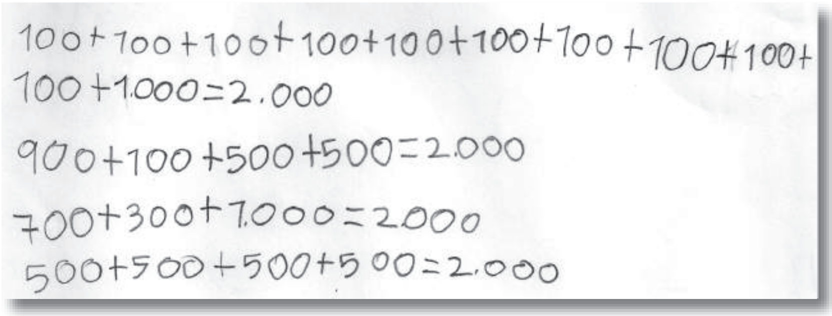




(Si la canasta cuesta 2.000 pesos podré pagar con 4 monedas de $500. También con 20 monedas de $100 o 2.000 monedas de $1. También con 2 monedas de $500 y 1 billete de $1.000)

Estas respuestas están correctas, pero es importante hacer notar que toman mucho tiempo en escribirse.

Otras, por el contrario, toman menos tiempo en ser expresadas:


100+100+100+100+100+100+100+100+100+
100+1.000=2.000
900+100+500+500=2.000
700+300+1.000=2000
500+500+500+500=2.000

Este problema, en general, no presenta complicaciones. Los errores frecuentes se remiten a equivocaciones en los cálculos. Algunos alumnos, como el de la última imagen, usaron las cantidades 900, 700 y 300, que no corresponden a monedas. En estos casos la profesora mostró el trabajo al curso y los niños se dieron cuenta del error.

La profesora Jessica añade que cuando ella realizó esta clase “incluso aquellos niños con necesidades educativas especiales encontraron formas de pagar, esto dejó de manifiesto que el problema generó oportunidades de participación para todos.”

Recomendaciones

Debido a que los estudiantes son pequeños y no todos usan dinero, es importante hacer un breve repaso de todas las monedas y billetes que se utilizan.

También es importante fijarse en las cantidades que utilizan los alumnos, es común que usen monedas inexistentes, en esos casos el profesor debe hacer que el niño perciba su error.

Es beneficioso motivar a los estudiantes a generar más soluciones y compartir las estrategias interesantes que vayan surgiendo.

Las respuestas a este problema son muchas y se hace difícil hallarlas todas en una clase, sin embargo el objetivo está puesto en otros aspectos y es importante tenerlos en cuenta a lo largo de la clase.

Problema 2:

EL CUADRADO

Nivel en que fue implementado: 3º Básico

Enunciado

Divide un cuadrado en dos piezas que sean iguales. Muestra tantas formas diferentes como puedas.

Objetivos

I. Desarrollar comprensión y destreza matemática.
Se espera que los y las estudiantes logren:

- Dividir un cuadrado en dos partes iguales de varias maneras diferentes.
- Determinar si dos piezas de papel son iguales, esto ocurre si al cortar el cuadrado por la línea divisoria y sobreponer las piezas éstas calzan.
- Crear una estrategia para producir soluciones más complejas, consistentes en hacer "sacados" respecto del punto central del cuadrado, de modo que la línea divisoria no sea recta sino que con curvas o líneas quebradas.

II. Fomentar la creatividad.

Luego de hallar las soluciones triviales, los niños y niñas deberán idear muchas otras respuestas. Las respuestas son infinitas y permiten al alumno crear las formas que quiera, siempre que se cumplan las condiciones. La creatividad de los estudiantes será un factor clave en el desarrollo de la tarea puesto que incidirá en el atractivo visual de las formas creadas y en la capacidad de inventar y depurar la estrategia con que creará soluciones en mayor cantidad y de más complejidad.

III. Desarrollar confianza en su capacidad de hacer matemática.

Todos los niños y niñas deberán convencerse de que son capaces de encontrar soluciones al problema planteado. Una vez que encuentren una estrategia que les permita generar varias respuestas se darán cuenta de que pueden crear formas diversas y visualmente atractivas. El profesor podrá ir mostrando los trabajos al resto de los compañeros. Es importante que valore el trabajo de cada estudiante y le haga notar cuando haya sido capaz de aportar con soluciones interesantes.

Instrucciones

Leer el problema entre todos. El docente deberá explicar, además, qué significa que dos piezas sean iguales, esto es que al sobreponerlas calcen de modo perfecto. Si bien es más acertado decir que las piezas sean congruentes, el término congruencia es desconocido en tercero básico, por lo que se considera que con esta explicación puede trabajarse del mismo modo.

Entregar a cada alumno una hoja tamaño oficio o carta (puede ser la misma donde aparezca el enunciado con el problema) que tenga muchos cuadrados dibujados, explicar a los niños que deben dibujar ahí sus respuestas.

Para que comprueben si lo que han dibujado está correcto, entregar a cada estudiante muchos cuadrados de papel lustre. En el papel se dibuja la solución que quieren comprobar y se corta para ver si al sobreponer las piezas éstas calzan.

A medida que los niños van produciendo respuestas invitarlos a que muestren su trabajo a sus compañeros. El curso deberá indicar si el trabajo está correcto.

Descripción de la clase

La clase de la profesora Denisse comienza con la lectura del problema. La instrucción es corta y precisa. La docente explica, además, qué significa que dos partes sean iguales: “cuando al cortar por la línea marcada y sobreponer ambas piezas, éstas calcen perfectamente. Para hacerlas calzar puedo girar el papel del modo que me resulte más conveniente”.

La hoja que se entrega a los estudiantes tiene, bajo el encabezado, muchos dibujos de cuadrados de 4x4 cm. Se explica a los alumnos que deben dibujar sus soluciones en los cuadrados. Además, se entrega a cada niño un sobre de papel lustre con el que podrán comprobar sus respuestas cortando y sobreponiendo las piezas.

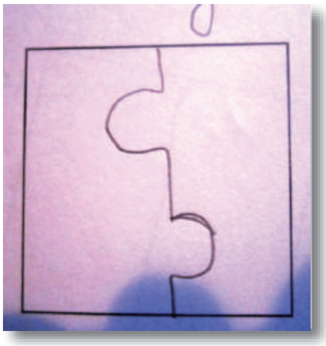
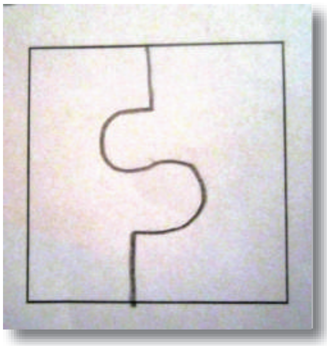
Algunos estudiantes encuentran rápidamente las soluciones más sencillas y la profesora los invita a pasar adelante para mostrar su trabajo al resto del curso. Para esto cada niño exhibe el dibujo en la hoja de oficio y el papel lustre cortado en dos piezas, las hace calzar frente al curso para comprobar que su respuesta es correcta.

Las primeras respuestas que los alumnos proponen son las soluciones triviales: rectas paralelas a los lados y diagonales. La profesora pregunta si están correctas y muchos estudiantes responden que sí y que ellos también han podido encontrar esas soluciones.

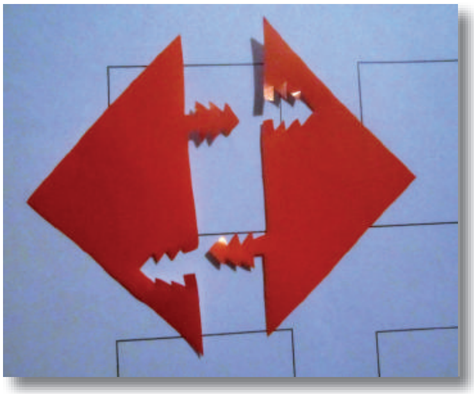
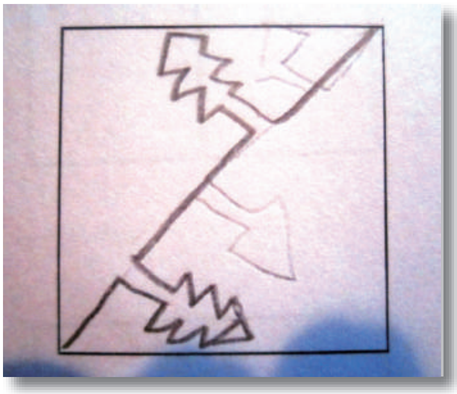
Denisse motiva a los niños a buscar soluciones distintas a las ya mostradas. De a poco comienzan a aparecer respuestas más sofisticadas.

El profesor Juan durante su clase saca adelante a los alumnos a mostrar su trabajo, pues de esta manera el resto del curso se inspira a obtener más respuestas. Cada vez que alguien muestra su trabajo, Juan le pide al curso que verifique si lo mostrado por sus compañeros está correcto, “de esa manera casi todos los estudiantes, incluso los que suelen tener mayores dificultades en la clase de matemática, comienzan a conseguir diversos cortes”.

Las siguientes imágenes son de algunos trabajos realizados por los niños:

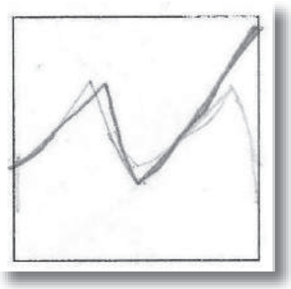




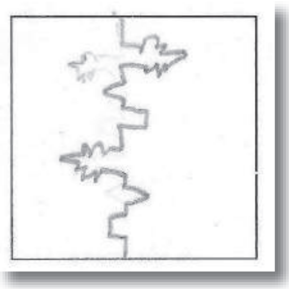
La profesora Denisse relata que en su clase “varios estudiantes se dieron cuenta de algo muy interesante: que al hacer un sacado en la parte superior derecha y hacer el mismo sacado en la parte inferior izquierda, de la mitad del cuadrado, fácilmente se crean muchas formas, por ejemplo: estrellas, lunas, soles, árboles, animales, etc”.

Recomendaciones

Es adecuado trabajar los errores de los niños de modo que sean ellos mismos quienes puedan concluir que una solución es incorrecta. A continuación se muestran dos soluciones incorrectas que generaron confusión en los estudiantes y cuya comprobación con el material concreto permitió hacer evidente el error. En estos casos es muy importante que el alumno corte y se percate de que las figuras no calzan, así él mismo podrá llegar a la conclusión de qué cosas hizo mal y las revertirá en su próximo intento.





La profesora Denisse enfatiza "si te das cuenta que un alumno con dificultades produjo un buen resultado, es útil mostrar su trabajo al curso y mencionar lo bien que lo hizo".

Es importante tener mucho material disponible, varias hojas con cuadrados dibujados y bastante papel lustre, pues esta actividad resulta muy motivadora y se ha observado que la mayoría de los estudiantes piden más material para seguir encontrando soluciones, incluso después de terminada la clase.

Aspectos interesantes

Se observa que trabajar con este problema da resultados muy satisfactorios. Es particularmente exitoso con los estudiantes que no suelen interesarse mucho por la clase de matemática, varios profesores comentaron lo entretenidos que estaban estos alumnos produciendo respuestas.

También se observa que a los niños les tomó menos tiempo que a los adultos encontrar respuestas distintas de las triviales, esto se evidenció en las instancias de planificación conjunta donde profesores e investigadores intentaron resolver el problema. Este hecho influyó positivamente en cuanto a las expectativas que los docentes tenían de sus estudiantes.

Problema 3:

LAS BANDERAS

Nivel en que fue implementado: 3º Básico

Enunciado

Usando tres colores y tres franjas, dibuja tantas banderas distintas como puedas.

Objetivos

I. Desarrollar comprensión y destreza matemática.
Se espera que los y las estudiantes logren:

- Construir distintas banderas usando tres colores y tres franjas.
- Discutir sobre el concepto de franja y llegar a un consenso respecto de lo que entenderán por dicho concepto.
- En base a lo anterior, ser capaces de determinar si un trabajo cumple las condiciones descritas.
- Concluir que, dada una bandera de tres franjas, es posible permutar los colores y obtener 5 banderas más usando un mismo diseño.

II. Fomentar la creatividad.

Dadas las condiciones del enunciado, donde no es claro qué se entenderá por franja, es esperable que los niños y niñas construyan soluciones que rayen en el límite de lo aceptable según la definición que hayan consensuado. Se observó en las clases realizadas que aparecieron respuestas novedosas las cuales los profesores previamente no habían considerado posibles. El docente, además de incentivar a sus alumnos a generar muchas soluciones, deberá valorar las respuestas creativas y fuera de lo común.

III. Desarrollar confianza en su capacidad de hacer matemática.

En este problema los y las estudiantes trabajan en base a un enunciado cuyas instrucciones no parecen precisas, pues el término “franja” no es un concepto matemático y al examinar las respuestas posibles surge la necesidad de definir dicho concepto para precisar qué se está entendiendo. En una primera instancia los niños intentan pedir ayuda y encontrar en el profesor una instrucción más precisa, pero el docente insta a que sean los mismos alumnos quienes lean las instrucciones e interpreten qué es permitido y qué no, y al haber necesidad de definir deberán ser ellos quienes lo hagan. Fomentar este tipo de trabajos hace que progresivamente los niños comiencen a buscar una guía, primeramente en los enunciados, y logren identificar cuando la clave para comprender un problema está en conocer la definición de los conceptos implicados. Esto les otorga independencia respecto de la guía externa que necesitan al enfrentarse a un problema.

Instrucciones

Entregar a cada alumno una hoja con el enunciado y muchos rectángulos dibujados. Cada niño debe tener tres lápices de colores. El profesor debe indicar que cada estudiante deberá dibujar todas las banderas con los mismos tres colores. Si se da la licencia de elegir colores distintos para cada bandera el problema cambia completamente.

Dar tiempo a los estudiantes para dibujar y luego sacar a algunos a la pizarra para que muestren su trabajo.

Promover la discusión para que los alumnos lleguen a un consenso respecto de lo que se entenderá por franja y en base a este consenso puedan determinar si el trabajo que muestran sus compañeros está correcto.

Descripción de la clase

La clase de la profesora Luzmira comienza con la entrega de la hoja que contiene el enunciado del problema. La misma hoja tiene, bajo el enunciado, muchos rectángulos, los cuales facilitarán el dibujo de las banderas. Luego, entre todos leen el ejercicio y la profesora explica que los tres colores que elijan en un principio deben ser los mismos que usarán para dibujar todas las banderas. Los niños comienzan a trabajar.

Rápidamente surge la pregunta ¿qué es una franja? Ya se acordó previamente, en la planificación, dejar que sean los mismos niños quienes digan que entienden por franja dando algunos ejemplos, pues éste no es un concepto matemático y que esté rigurosamente definido, pero todos tienen alguna noción de a qué se refiere.

La profesora Luzmira relata que al surgir esta pregunta en su clase “los alumnos dan opiniones, una compañera explica lo que es para ella una franja, dibuja un ejemplo, con lo que llegan a un consenso y comienzan la actividad”.

Todos los alumnos son capaces de producir respuestas correctas, algunos se dan cuenta de que al intercambiar los colores de un mismo diseño pueden obtener fácilmente 5 banderas más, con lo que aumenta su número de respuestas.

A continuación imágenes de los trabajos de los estudiantes:

Aparecen algunos dibujos que generan dudas, Luzmira no dice si están buenos o malos, sino que interroga al niño para que aclare su definición de franja y en base a eso hace que sea él mismo quien determine si su trabajo está bien. A veces las respuestas son incorrectas y el alumno debe borrar su trabajo o marcarlo con una cruz y hacer otro que sí cumpla las condiciones.

El profesor Domingo, agrega que cuando él realizó esta clase “los estudiantes con necesidades especiales se integraron muy bien a la actividad, se motivaron en buscar respuestas al igual que el resto de su curso”.

Durante toda la clase la profesora Luzmira deja que los alumnos que quieran pasen a dibujar banderas a la pizarra, para esto tiene tres plumones de diferentes colores. Todos los niños quieren pasar a mostrar su trabajo por lo que al final de la clase hay muchas banderas dibujadas en la pizarra.

La profesora pregunta cuánto tiempo podrían estar dibujando banderas, los estudiantes responden que mucho tiempo pues deben haber infinitas.

Recomendaciones

Es importante que el profesor no dé una definición exacta del concepto de franja, sino que deje que los estudiantes sean quienes construyan este concepto a partir de ejemplos.

A la vez, no debe quedar la sensación de que cualquier trabajo está correcto, hay casos derechamente errados y debe guiarse al niño para que comprenda su error.

Valorar los trabajos creativos que aparezcan a lo largo de la clase y aprovechar aquellos donde no es claro si las banderas cumplen las condiciones o no, para crear discusión colectiva y afinar el concepto.

Valorar las estrategias que surjan como el intercambio de colores para producir más respuestas con un mismo diseño. Dar espacio para que los niños expliquen las estrategias encontradas.

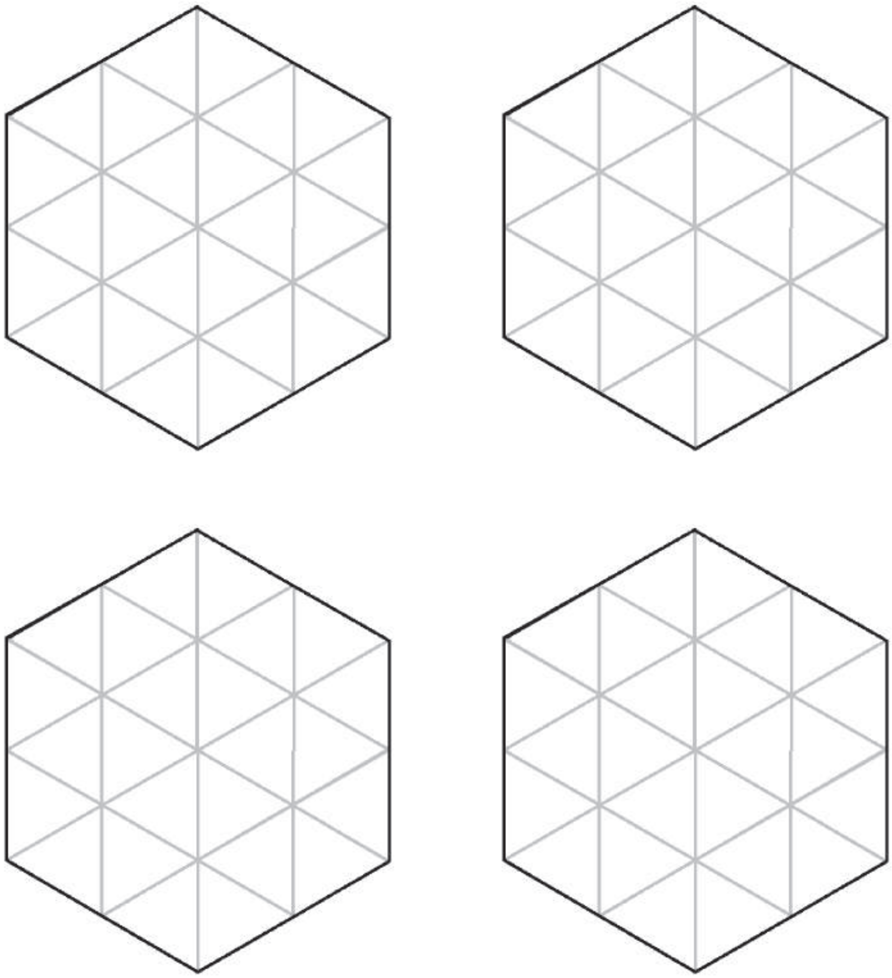
Problema 4:

HEXÁGONO

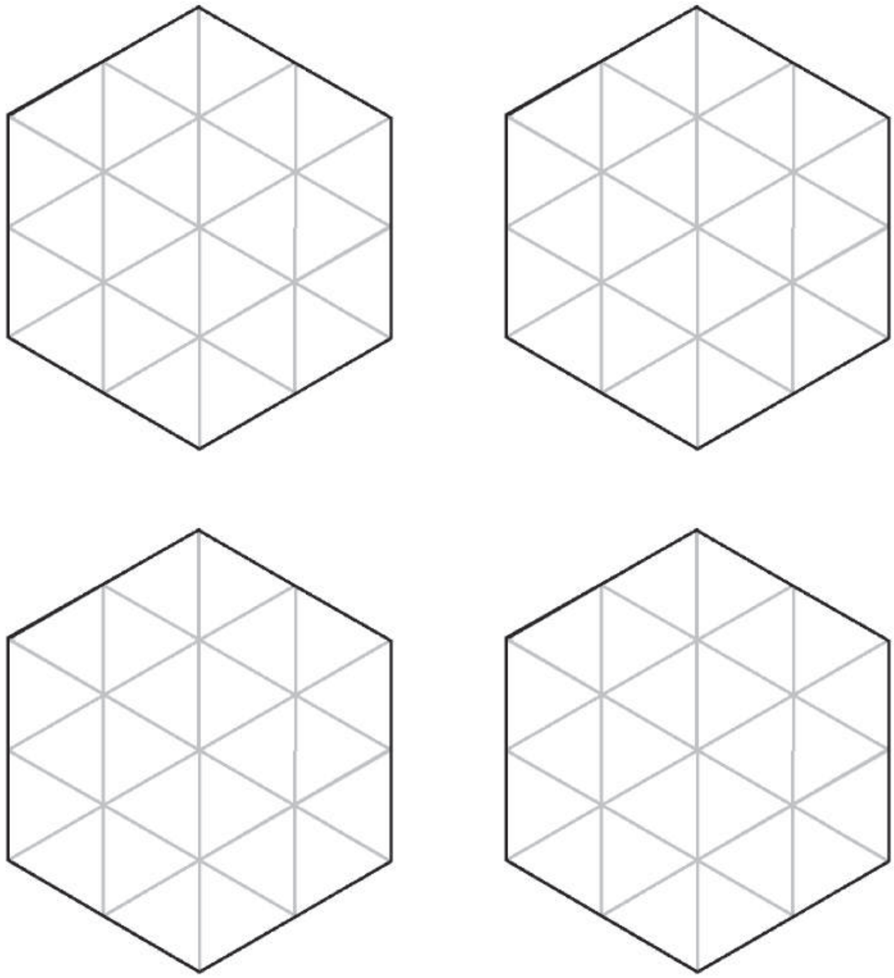
Nivel en que fue implementado: 3º Básico

Enunciado

Parte 1
Ejercicio 1: Divide el hexágono regular en 2 partes iguales.

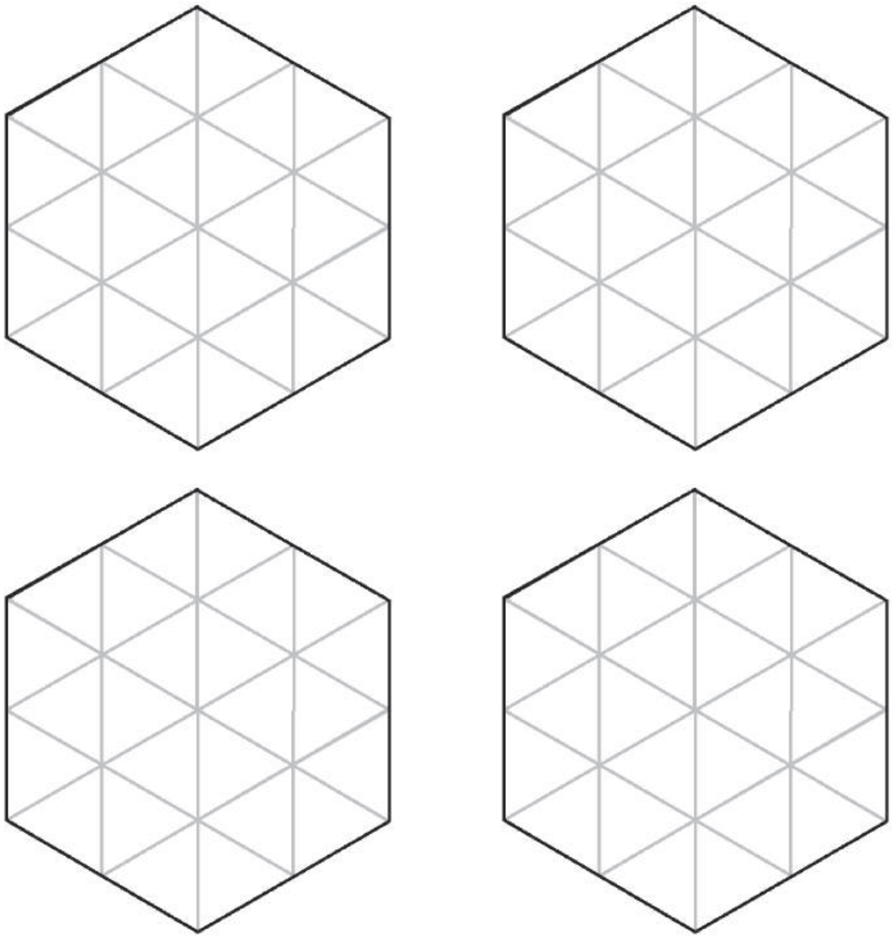


Parte 2
Ejercicio 2: ¿Se puede dividir el exágono regular en 3 partes iguales? ¿De varias maneras? Dibújalas.



Parte 3

Ejercicio 3: ¿Se puede dividir el exágono regular en 4 partes iguales? ¿y en 5? ¿y en 6? ¿y en 7, en 8...? ¿Hay algún número de partes iguales para el cual no se pueda dividir el hexágono regular?



Objetivos

I. Desarrollar comprensión y destreza matemática.
Se espera que los y las estudiantes logren:

- Dividir un hexágono en dos y en tres partes iguales de varias maneras diferentes.
- Determinar si dos o tres piezas de papel son iguales, esto ocurre si al sobreponer las piezas en que se cortó el hexágono éstas calzan.
- Inventar una estrategia para producir soluciones más complejas, la cual consiste en hacer “sacados” a las soluciones triviales manteniendo como referencia el punto central del hexágono.
- Concluir que es posible dividir un hexágono en 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24 partes iguales y mostrar al menos una manera de hacerlo.
- Percibir la dificultad que tiene dividir el hexágono en 5 o 7 partes iguales.

II. Fomentar la creatividad.

Este problema se liga con el ejercicio anterior del cuadrado, pues las estrategias de resolución son similares, a pesar de que en éste se complejizan bastante. Por lo anterior, si los niños y niñas ya tuvieron la oportunidad de resolver el problema del cuadrado rápidamente podrán hallar soluciones distintas de las triviales. Tal como en el ejercicio anterior, la creatividad de los alumnos será un factor clave en el desarrollo de la tarea, puesto que incidirá en el atractivo visual de las formas creadas y en la capacidad de inventar y depurar las estrategias con las que podrán crear soluciones en mayor cantidad y de más complejidad.

III. Desarrollar confianza en su capacidad de hacer matemática.

Todos los alumnos y alumnas deberán convencerse de que son capaces de encontrar soluciones al problema planteado. Una vez que encuentren una estrategia que les permita generar varias respuestas se darán cuenta de que pueden crear formas diversas y visualmente atractivas. El profesor podrá ir mostrando los trabajos al resto de los compañeros. Es importante que valore el trabajo de cada estudiante y le haga notar cuando haya sido capaz de aportar con soluciones interesantes.

Instrucciones

Entregar el problema a cada alumno, leerlo entre todos para comprender lo que se debe hacer. Es aconsejable tener muchas hojas disponibles que sólo contengan hexágonos con las líneas interiores marcadas. Estas hojas serán sus borradores, acá los estudiantes podrán probar las soluciones cuando no estén seguros y podrán cortar para comprobar.

Explicar que siempre pueden comprobar sus respuestas cortando las partes y sobreponiéndolas para ver si coinciden.

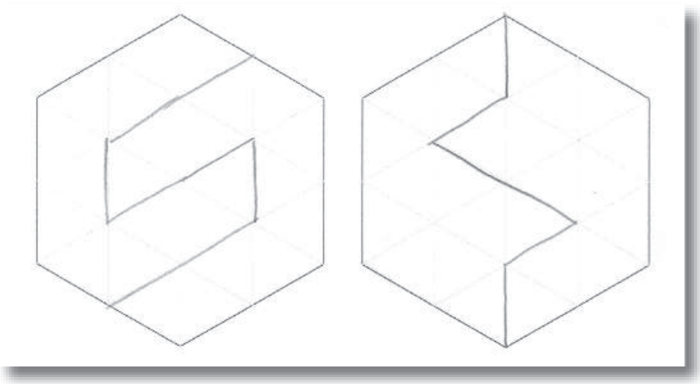
Dar tiempo suficiente para que los niños resuelvan las dos primeras tareas, dejar que encuentren muchas soluciones.

En la tercera parte del problema motivar a que los alumnos descubran qué divisiones son posibles de hacer.

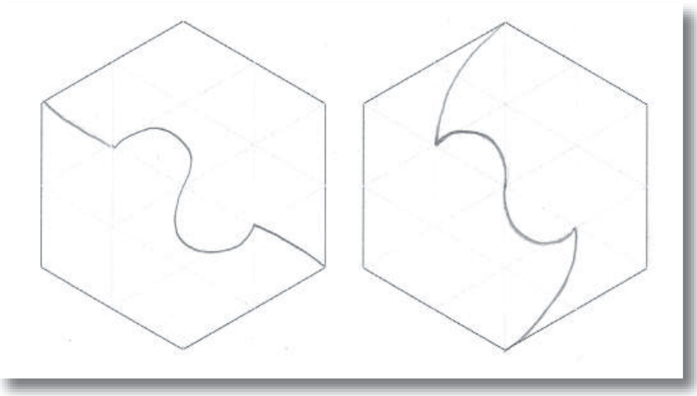
Descripción de la clase

El profesor Manuel comienza su clase con la lectura de la primera parte del problema, los niños lo relacionan de inmediato con el ejercicio del cuadrado realizado 2 meses atrás, que es parecido, y comienzan a crear soluciones inventando rápidamente respuestas distintas de las triviales (entendemos como respuestas triviales las líneas rectas que pasan por el centro y los vértices opuestos del hexágono).

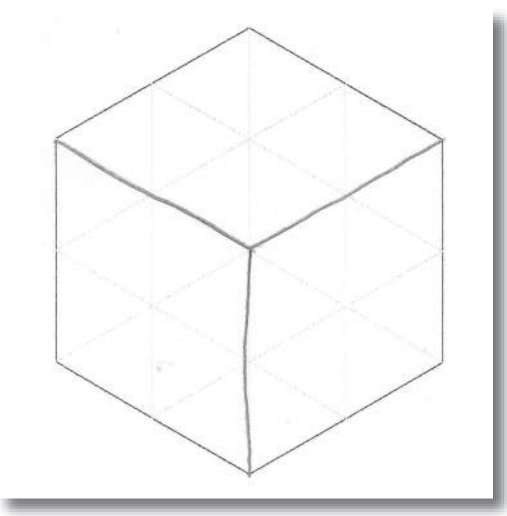
El curso completo está trabajando muy interesado en el problema. Manuel les recuerda que pueden cortar el papel de su hoja de borrador para comprobar sus respuestas si es que no están seguros de que las partes son iguales. Aparecen soluciones como las que se muestran en las imágenes a continuación.



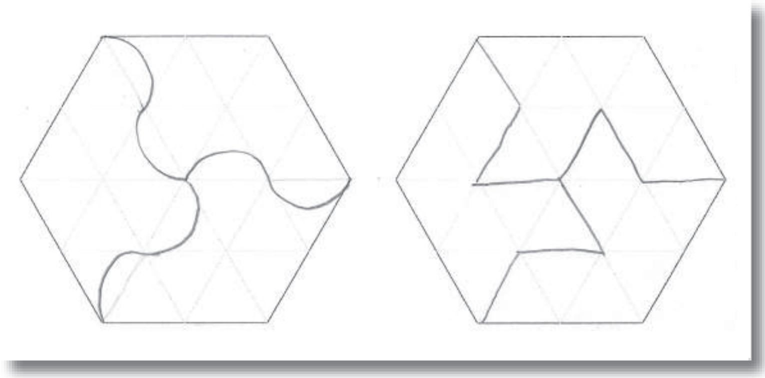
El profesor permite que los niños muestren sus respuestas, esto incentiva a los estudiantes a encontrar soluciones más novedosas para mostrar a sus compañeros. Al ver que muchos alumnos utilizan las líneas marcadas en el hexágono, Manuel les recuerda que también pueden emplear líneas curvas o quebradas, con lo que surgen respuestas más sofisticadas como las que aparecen a continuación:



Una vez que todos los alumnos han creado varias soluciones el profesor decide pasar a la segunda parte del problema. Los niños descubren que pueden dividir el hexágono en 3 usando líneas rectas, de modo que se puede observar un cubo como el que muestra la imagen:



Manuel ya esperaba que los niños encontraran esta solución, pues lo habían comentado en la reunión de planificación de la clase y era una respuesta esperada. Entonces, los motiva para seguir encontrando soluciones y aparecen varias respuestas interesantes.



El profesor da el tiempo suficiente para que todos los alumnos encuentren soluciones, cuando todos han avanzado queda poco tiempo para salir a recreo. Entonces, Manuel les propone leer la tercera parte del problema. Surgen varias apreciaciones interesantes, por ejemplo: que es fácil dividir el hexágono en 4 o 6 partes iguales. Con un poco más de esfuerzo logran dividirlo en 8, en 12 y en 24 partes iguales, pero no logran hacerlo en 5 y 7 partes iguales. El tiempo que queda es poco y no es posible ordenar las apreciaciones de los estudiantes de modo que quede clara una conclusión final, sin embargo el profesor hace que los niños expongan al curso lo que consiguieron encontrar.

Al final de la clase Manuel comenta: “rescato el entusiasmo de los alumnos para exponer sus soluciones, y que los niños que estuvieron en esta ocasión más activos no son alumnos que regularmente participen en clases”.

Recomendaciones

Es recomendable que los estudiantes que tienen más dificultades para visualizar si sus soluciones son correctas lo comprueben con material concreto, es decir con la hoja de borrador. Esto les permitirá darse cuenta de sus errores y perfeccionar la técnica que emplean. Por el contrario, los alumnos que resuelvan de modo más rápido el problema debieran ser capaces de discriminar si las soluciones son correctas de modo visual.

Si las respuestas que aparecen únicamente son soluciones dibujadas sobre las líneas marcadas al interior del hexágono, se debe recordar a los alumnos que estas líneas sólo son guías, y no es necesario que sus respuestas pasen por ahí, que pueden emplear, por ejemplo, líneas curvas para producir respuestas novedosas.

En la tercera parte los niños podrían usar de referencia los 24 triángulos en que está dividido el hexágono para argumentar que es posible dividir el hexágono en 24, 12, 6 y 3 partes iguales.

Problema 5:

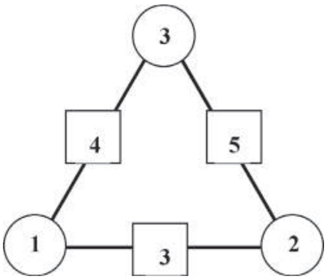
ARITMOGÓN

Nivel en que fue implementado: 3º Básico

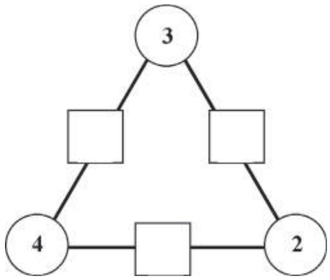
Enunciado

Parte 1
En un aritmogón hay un número en cada esquina del triángulo. Al sumarlos el resultado se pone en los cuadrados dibujados en los lados del triángulo.

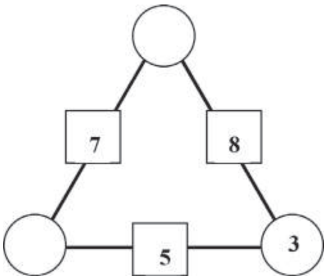
Ejemplo 1:



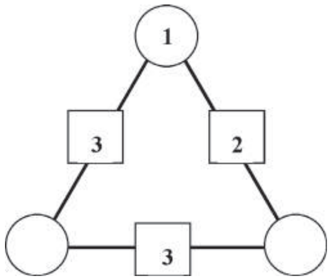
Ejemplo 2:
Calcula los números que faltan.



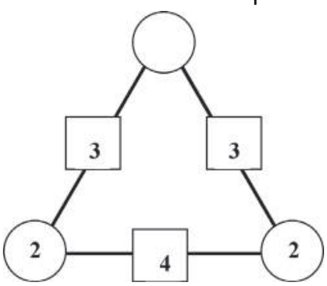
Ejemplo 3:
Calcula los números que faltan.



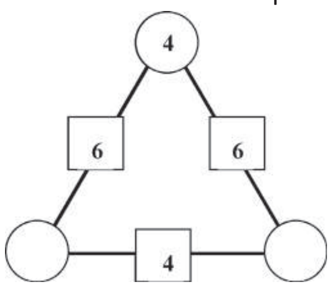
Ejemplo 4:
Calcula los números que faltan.



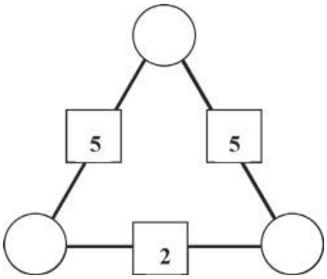
Ejemplo 5:
Calcula los números que faltan.

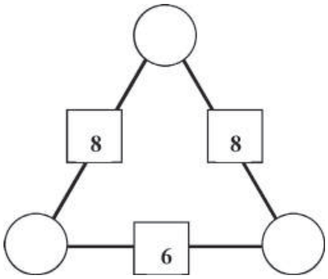


Ejemplo 6:
Calcula los números que faltan.



Parte 2
Ejercicio 1: Calcula los números que faltan en las esquinas.

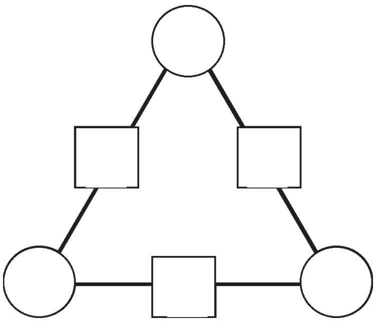
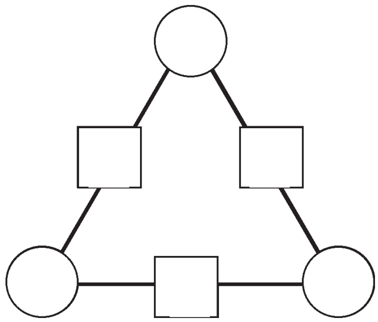




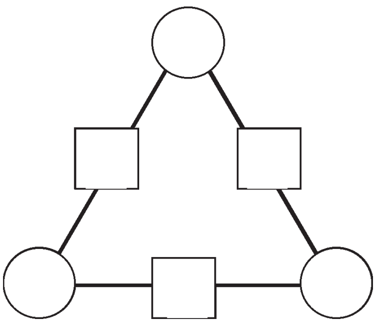
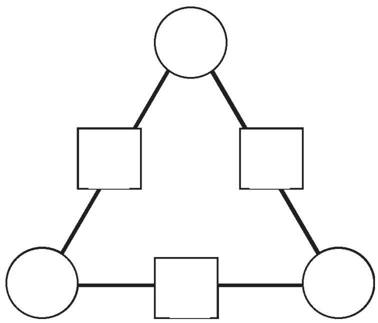
Los aritmogones pueden ser resueltos de muchas formas. ¿Cómo lo resolviste tú?

¿Encontraste un método para resolver el aritmogón cuando se dan los números de los lados y dos de esos números son iguales? Escríbelo.

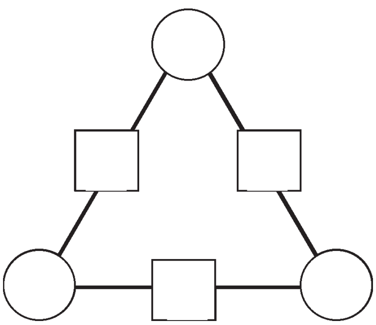
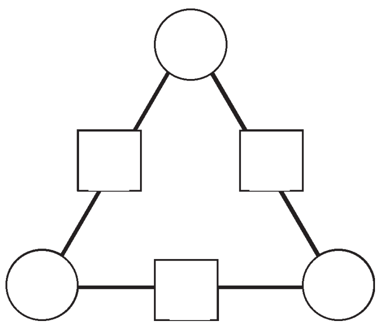
Ejercicio 2: Inventa un aritmogón fácil y otro no tan fácil para que lo resuelva tu compañero de banco. Resuelve los aritmogones que tu compañero invente para ti.

Y ahora otros dos:

Y otros dos más:

Objetivos

I. Desarrollar comprensión y destreza matemática.
Se espera que los y las estudiantes logren:

- Resolver varios aritmogones.
- Identificar una estrategia para resolver el aritmogón cuando dos de los números de los cuadrados son iguales, la cual consiste en poner en los vértices contiguos al número diferente la mitad de éste, y luego restar al número repetido para obtener el número en el vértice que falta.
- Inventar una estrategia para construir aritmogones cuya solución es conocida para quien los construye, ésta consiste en escribir números en los vértices, sumarlos para obtener los números de los cuadrados y luego borrar los números de los vértices.

II. Fomentar la creatividad.

En esta tarea los niños necesitarán generar una estrategia que permita construir aritmogones de modo que resulten desafiantes para sus compañeros, del mismo modo deberán inventar maneras de resolver los que les proponen a ellos. Estas estrategias de construcción y resolución no son evidentes en un principio y serán descubiertas dependiendo del ingenio de los estudiantes.

III. Desarrollar confianza en su capacidad de hacer matemática.

Este problema se caracteriza por propiciar un ambiente de trabajo autónomo y de concentración. Las instrucciones son claras por lo que los y las estudiantes comienzan a resolver los ejercicios, en ocasiones, antes de que el profesor lo indique. Las estrategias surgen, también, producto de ese trabajo personal o en discusión con sus pares.

Instrucciones

Repartir a todos los estudiantes las hojas con la tarea. El profesor deberá determinar si se entregan las hojas juntas o las va entregando a medida que los alumnos avanzan.

Comenzar leyendo la explicación de lo que es un aritmogón y analizar el ejemplo 1. Dar un tiempo breve para que los estudiantes resuelvan los otros ejemplos, comentar las diferencias que observan en cuanto a los niveles de dificultad de los ejemplos 2 y 3.

Pasar al ejercicio 1, dar tiempo para que cada uno trabaje intentando resolverlo y luego comentar entre todos. Incentivar a los alumnos a verbalizar de qué modo resolvieron el problema, poniendo énfasis en la regularidad encontrada.

Pasar al ejercicio 2, en éste los estudiantes deberán construir sus propios aritmogones fáciles y difíciles. El profesor hará que los alumnos expliquen por qué establecen esos grados de dificultad.

Dejar que los niños que quieran pasen a la pizarra a escribir un aritmogón para que el resto de su curso lo resuelva.

Descripción de la clase

La profesora Cecilia entrega el problema y explica que es un aritmogón. Los estudiantes comprenden rápidamente lo que deben hacer. Los primeros ejercicios no presentan complicaciones.

Al revisar los ejemplos entre todos, los estudiantes se dan cuenta de que cuando faltan los números de los cuadrados es muy fácil obtener la solución porque sólo deben sumar, pero al faltar los números de las esquinas deben ir probando con muchos números por lo que el problema es más difícil, sin embargo obtienen el resultado después de un tiempo.

Cuando llega el momento de hacer el ejercicio 1 los estudiantes ya están familiarizados con el aritmogón, así que se ponen rápidamente a buscar los números que podrían ir en los círculos de las esquinas. Algunos alumnos encuentran los números que faltan después de intentar con varias alternativas hasta llegar al resultado correcto.

Otros niños encuentran una estrategia eficiente y pueden explicarla, pero les cuesta mucho escribir dicha idea. Este hecho es bastante común y Cecilia está preparada para que así ocurra, de modo que ayuda a los estudiantes a escribir en sus palabras la estrategia empleada. No todos los alumnos encuentran métodos sofisticados, otros sí logran escribir sus estrategias con mayor o menor claridad.

A continuación algunos ejemplos de las respuestas:

(Si al número de abajo -al medio- le resto la mitad del número tiene que ser 6-3=3 y luego sumo 3+3=6 y luego resto 8-3=5 y ese es el método mío.)

(Si la mitad de dos es uno y al lado será uno y uno más 4 son 5)

(Pensando hasta que me salga bien)

(Porque en el primer triangulo hay 5 5 y 8 8 en el segundo y yo sumé 8+8 me dio 16 no era y pensé 3+3 son 6 y después puse 3 y 3 y resté 3-8 porque me dio 5)

En el ejercicio 2 los alumnos deben inventar aritmogones, algunos niños ponen números al azar resultando un problema sin solución. La profesora explica que el estudiante que inventa un aritmogón debe conocer sus resultados, así algunos comienzan a crear estrategias que les permitan construir un aritmogón cuya solución conozcan. Una táctica consiste en escribir números cualquiera en las esquinas, sumar para obtener los números de los cuadrados y luego borrar los de las esquinas. Así el compañero deberá descubrir qué números van en dichos espacios.

Pasan alumnos a escribir aritmogones en la pizarra para desafiar a sus compañeros. Algunos estudiantes intentan resolverlos en sus puestos para poder salir a la pizarra y mostrar que han obtenido la respuesta, otros siguen inventando o resolviendo aritmogones con su pareja.

La actividad mantuvo a todo el curso concentrado. La profesora Cecilia comenta que "la mayoría de los alumnos terminó el problema con satisfacción ya que pudieron resolver todo o gran parte de lo propuesto; fue el resultado de lo que ellos descubrieron y no algo mecánico y guiado por el profesor".

Recomendaciones

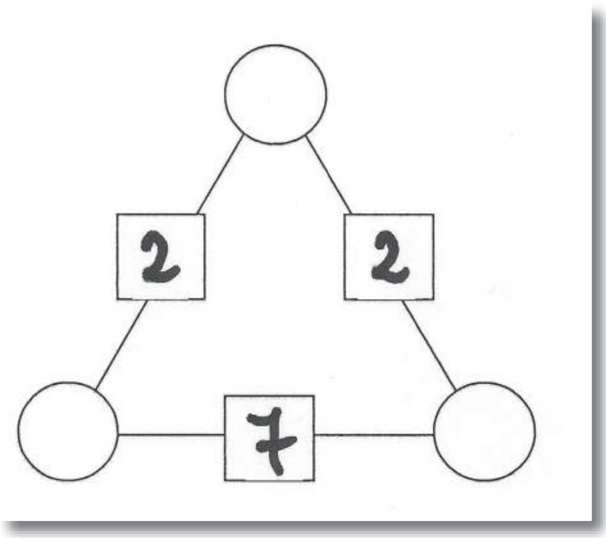
Es aconsejable que los estudiantes expliquen los ejemplos en la pizarra, así el profesor podrá cerciorarse de que están haciendo lo correcto. Dejar que los mismos niños sean quienes identifiquen y corrijan los errores.

Es bueno que en el ejercicio 2 usen lápices de colores distintos el alumno "inventor" y el que resuelve. Esto posteriormente permitirá entender el trabajo que hizo la pareja.

Se aconseja que el profesor centre su objetivo en que los niños identifiquen una estrategia de resolución, más que en llegar a los resultados correctos. Esto se hace explícitamente diciéndoles que intenten buscar estrategias, que las comenten y las discutan.

Aspectos interesantes

Cuando una profesora que participa en el proyecto realizó su clase uno de los niños presentó el siguiente aritmogón, desafiando a sus compañeros a resolverlo:



Todos los niños estuvieron de acuerdo en que ese aritmogón no tenía solución, pues en este nivel los decimales son desconocidos. Sin embargo uno de los niños exclamó: "sí tiene solución" pero pasó desapercibido por la profesora.

La investigadora que filmaba la clase esperó a que ésta finalizara y conversó con el niño:

Investigadora: ¿Cuál es la solución que encontraste para ese aritmogón?

Niño: a los lados, tres y medio y tres y medio.

Investigadora: ¿y qué número iría arriba?

Niño: aah, ahí no sé

Este hecho es interesante, pues observamos cómo trabajando este problema y de manera fortuita se abre un tema interesante y complejo: los números decimales. Por otro lado, nos damos cuenta de que los niños sí tienen nociones de los números decimales y quizás esta actividad pueda servir para introducir esta temática, si se diseña la actividad de modo tal que se le otorgue ese enfoque.

Problema 6:

DÍA DE CAMPAMENTO ESCOLAR

Nivel en que fue implementado: 3º Básico

Enunciado

Programa las actividades de un día de campamento con tu curso. Para ello considera lo siguiente:

Parte 1

- Las horas de sueño y la hora de levantarse.
- Todas las comidas (desayuno, almuerzo, onces, cena, y colaciones entre medio)
- Períodos de actividades deportivas y recreativas.
- Un período puede durar 30 minutos, 45 minutos o 60 minutos, de acuerdo con tu decisión.
- En el día debe haber por lo menos 3 horas y media de ejercicio físico.

Parte 2

- ¿Cómo puedes presentar tu programa lo más claro posible a los demás?
- En el programa deben verse con claridad los tiempos de inicio y de fin de cada actividad.

Objetivos

I. Desarrollar comprensión y destreza matemática.
Se espera que los y las estudiantes logren:

- Distribuir los tiempos en la planificación de las distintas actividades para construir un cronograma posible de llevar a cabo.
- Organizar la información de manera eficiente, tanto para trabajar como para comunicar sus resultados.
- Argumentar y discutir con sus pares las decisiones que deben tomar como grupo, en cuanto a la distribución de los tiempos y en el modo de organizar dicha información.

II. Fomentar la creatividad.

Esta tarea plantea a los niños y niñas el desafío de planificar las actividades de una salida escolar. Por lo general, el entusiasmo los impulsa a dedicar tiempos más prolongados a las actividades que más les gustan, como jugar, nadar, etc.; sin embargo, deben considerar las restricciones que implica el problema, pues tienen que destinar tiempo para comer, descansar, etc. El desafío consiste en combinar estas variables de un modo adecuado y que deje satisfechos a sus pares. El tener que comunicar la información acordada agrega un nuevo desafío, pues deberán inventar una manera de presentar sus resultados.

III. Desarrollar confianza en su capacidad de hacer matemática.

En este problema las decisiones que toman los y las estudiantes son fundamentales, por lo que todo el trabajo realizado es producto de las determinaciones grupales, tanto en las actividades planificadas como en la manera de presentar su cronograma al resto del curso. Esto fortalece la autonomía de los alumnos en cuanto al trabajo con el manejo de variables y al modo de presentar la información, e incrementa la confianza en su capacidad para llevar a cabo este tipo de trabajos.

Instrucciones

Organizar al curso en grupos de 4 o 5 niños. Entregar la hoja con el enunciado de la tarea a cada alumno. Leer juntos el problema y explicar hasta que todos los estudiantes lo comprendan.

A medida que desarrollan el trabajo, monitorear los avances de los grupos para verificar que sus propuestas son viables. Es posible que los niños no incluyan comidas por preferir jugar, en estos casos el profesor debe conversar con los alumnos y preguntar sobre la aplicabilidad de su cronograma, tras escuchar sus respuestas puede motivarlos a defender su propuesta o a realizar los cambios que estimen convenientes.

Después de un tiempo, los grupos deberán exponer su trabajo al resto de sus compañeros, para esto deberán mostrar su cronograma como mejor les parezca. Motivar al resto del curso a discutir sobre el cronograma propuesto y la claridad en la manera de presentarlo.

Descripción de la clase

La clase de la Profesora Nancy comienza con la conformación de los grupos de trabajo de 4 o 5 alumnos. Leen el problema entre todos y la profesora pregunta si es que algo no se entiende, explicándolo nuevamente hasta que todos los estudiantes parecen comprender.

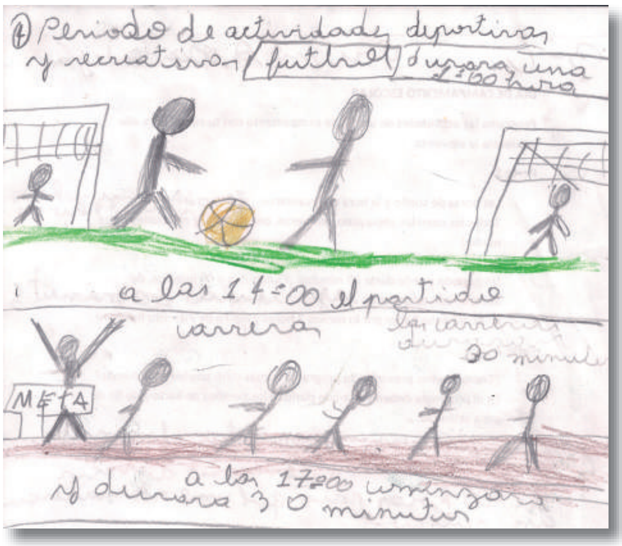
Un niño pregunta si el paseo es real, si podrán ejecutar el cronograma que diseñen, Nancy le explica que por ahora es sólo un ejercicio de ficción.

Los estudiantes comienzan a discutir entre ellos, al ser muchas las variables a considerar no tienen claro cómo empezar, de a poco van anotando propuestas y discutiéndolas en el grupo.

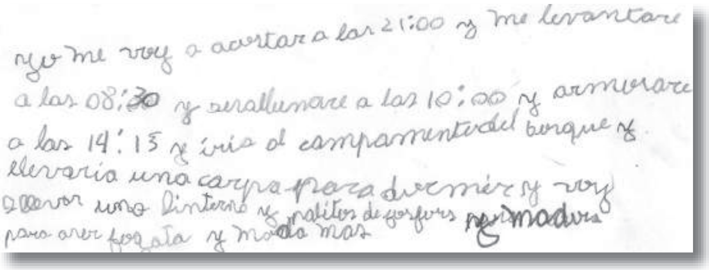
El clima del aula es bullicioso ya que todos los estudiantes conversan enfocados en resolver el problema.

Un error común en el desarrollo de la tarea es que dediquen muy poco tiempo a algunas actividades que requieren más, por ejemplo: dormir 3 horas para jugar más. La discusión grupal permite que se corrijan estos errores a veces entre los mismos estudiantes, otras veces la profesora los interroga sobre lo viable de sus propuestas. Al anotar el cronograma se dan cuenta de que hay diversas formas de representar las actividades que realizarán, algunos diseñan tablas de doble entrada, que indican: hora de inicio y término de un período, y la actividad realizada. Otros deciden realizar dibujos indicando las horas en que se harán las actividades dibujadas.

A continuación se muestran algunos trabajos donde los niños representan la información de distintas maneras:



(Periodo de actividades deportivas y recreativas: Fútbol, durará una hora. A las 14:00 el partido; Carrera, a las 17:00 comenzará y durará 30 minutos)



(Yo me voy a acostar a las 21:00 y me levantaré a las 08:30 y desayunaré a las 10:00 y almorzaré a las 14:15 e iría al campamento del bosque y llevaría una carpa para dormir y voy a llevar una linterna y palitos de fósforos y madera para hacer una fogata y nada más)

Cerca del final de la clase, la profesora invita a los estudiantes a mostrar su trabajo al resto, al observar las presentaciones de los grupos los alumnos notan que hay distintas maneras de presentar un cronograma. En muchos casos los trabajos muestran distintas actividades que realizarán pero no alcanzan a cubrir las 24 horas, quedan tiempos donde no se muestra qué se hará. Esto es motivo de debate entre los niños.

Posteriormente, en la reunión de evaluación con los profesores participantes en el proyecto, se comenta sobre lo acontecido en la clase. Se hace notar que esta actividad es bastante compleja para alumnos de tercero básico, el manejo de las horas y la percepción del tiempo es muy variada, mientras a algunos niños se les hace muy fácil, otros verdaderamente no saben ni siquiera escribir la hora y representar lapsos de tiempo, por lo que es una tarea muy difícil para ellos. Los docentes concuerdan en que los estudiantes estuvieron muy involucrados y entretenidos con la actividad, esa motivación ayudó a que pudieran resolver este problema de gran dificultad. Además la discusión grupal facilitó el aprendizaje y la ayuda entre pares.

Recomendaciones

Si es posible, realizar la actividad cuando los niños vayan a tener una salida real, esto los motivará mucho. Algunos estudiantes se defraudaron al saber que sólo era un ejercicio.

Poner atención a los tiempos que destinan los alumnos a cada actividad, algunos destinarán tiempos muy cortos a actividades que requieren más y viceversa.

Revisar que los estudiantes logren describir lo que harán en las 24 horas que dura el paseo, es común que dejen tiempos donde no hay ninguna actividad descrita.

Enfatizar que la manera en que se presenta la información es muy importante, destacar las propuestas interesantes y ayudar a corregir los métodos de presentación poco eficientes.

Problema 7:

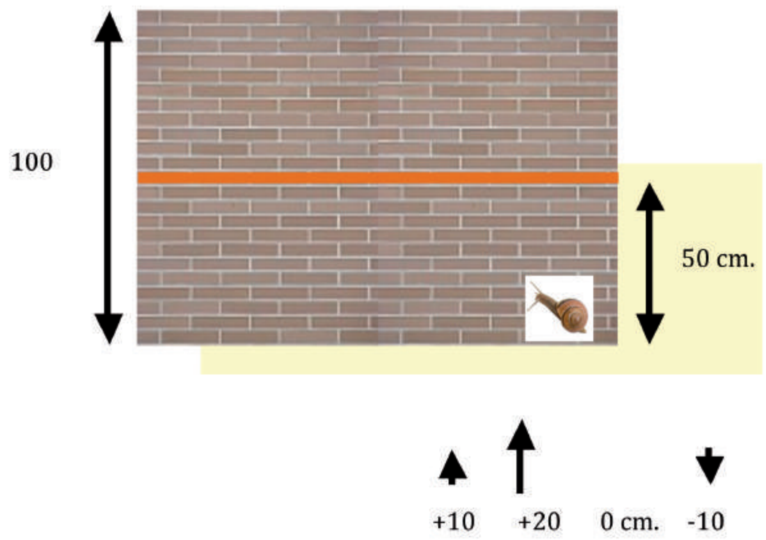
GARY EL CARACOL

Nivel en que fue implementado: 4º Básico

Enunciado

Parte 1

Gary el caracol sube una muralla muy lentamente. Hay días en los que sube 10 cm, hay días que sube 20 cm, hay días que no se mueve, y hay días que se queda tan dormido que baja 10 cm. La muralla tiene 100 cm de altura.



Muestra una manera en que Gary pueda llegar desde el suelo hasta la mitad de la muralla.

Parte 2

Al final del día 10 Gary está en la mitad de la muralla. ¿Qué pudo haber ocurrido en esos diez días? Muestra tantas formas como puedas.

Objetivos

I. Desarrollar comprensión y destreza matemática.
Se espera que los y las estudiantes logren:

- Reconocer la importancia de desarrollar una representación simbólica eficiente, tanto para trabajar como para comunicar sus resultados. El lenguaje simbólico matemático es una conquista de la humanidad en este sentido y este problema permitirá apreciar el valor de esa conquista.
- Descubrir el rol del 0 que no hace nada (neutro aditivo) y que restando 10 se anula una subida de 10 (inverso aditivo).

II. Fomentar la creatividad.

Inventar distintas trayectorias de Gary promueve la creatividad en los y las estudiantes, pero crear formas de representar el problema es aún más desafiante y favorecedor del desarrollo de dicha capacidad en los alumnos. Para lograr este objetivo no se deben mostrar representaciones posibles, excepto que se muestren al menos 2 distintas y que esto sea imprescindible para ayudar a niños que lleven demasiado tiempo sin encontrar alguna forma de hacerlo.

III. Desarrollar la confianza en su capacidad de hacer matemática.

Todos los niños y niñas deben convencerse de que son capaces de encontrar al menos una solución. Por eso se incluye en el texto la pregunta acerca de cómo Gary puede llegar a la mitad de la muralla, sin preocuparse del número de días. Además, el hecho de que sean los mismos estudiantes quienes elijan la manera en que van a representar sus respuestas hace que comprendan que la representación en sí es un problema interesante de resolver, más allá de los resultados mismos. El que ellos sean capaces de encontrar modos de representación más convenientes y que este aspecto sea una tarea cuya solución es valorada hace que fortalezcan su autoconfianza y amplíen el horizonte respecto del quehacer matemático.

Instrucciones

Entregar la hoja con la tarea a cada alumno y leer entre todos el encabezado de la primera parte. Dado que esta primera tarea es relativamente sencilla se resuelve individualmente y no se da tanto tiempo. Es importante que todos los niños hayan encontrado varias soluciones antes de pasar a la segunda parte. También es relevante que los estudiantes vayan compartiendo sus trabajos y explicando cómo decidieron anotar sus respuestas.

Para no frenar a los niños más rápidos haciéndolos esperar a los más lentos, se entrega toda la tarea junta, por lo que es posible que algunos alumnos comiencen a resolver la segunda parte antes que sus compañeros.

Para la segunda parte se organiza a los estudiantes en grupo o duplas (no hacer grupos grandes). Esto se puede postergar hasta que todos los niños hayan respondido la primera pregunta. No hay ningún inconveniente en que comiencen a abordar la tarea de los 10 días individualmente y que se posponga el trabajo grupal, ya que esta modalidad aporta fundamentalmente a discutir las representaciones simbólicas, lo que los alumnos pueden hacer una vez que tienen varias soluciones y la necesidad de comunicarlas. Una agrupación muy temprana inhibirá el trabajo de los más lentos.

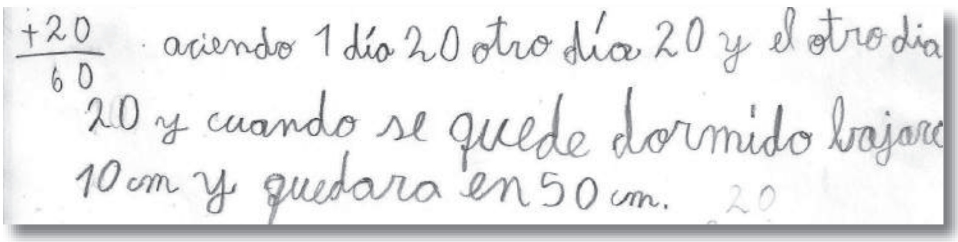
Una vez que los niños encontraron algunas respuestas a la segunda parte y discutieron con sus pares los modos de representación de estas respuestas, el profesor sacará alumnos a la pizarra a compartir su trabajo con el curso.

Descripción de la clase

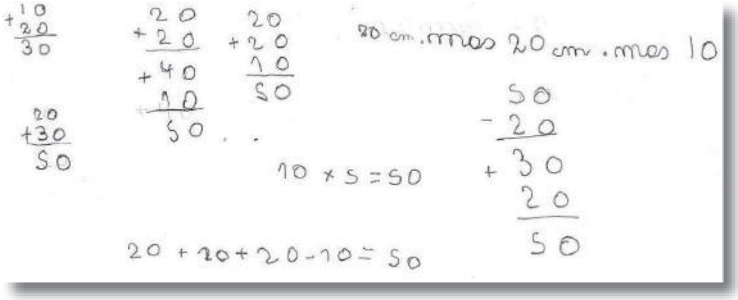
La clase de la profesora Marcela comienza con la lectura de la primera parte del problema. Los niños están inseguros en un comienzo, pero al surgir las primeras respuestas invita a los alumnos que las encontraron a mostrar y explicar su trabajo, lo que facilita que el resto de los estudiantes comprenda mejor las instrucciones y comience a trabajar de un modo adecuado.

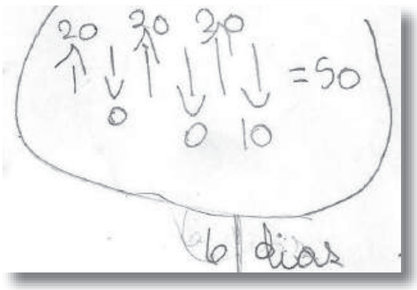
La manera en que representan sus soluciones es elegida por cada niño, y algunas resultan más convenientes que otras si lo que se quiere es producir un gran número de respuestas.

A continuación se muestran algunas respuestas a la primera parte del problema:


+20
60
aciendo 1 día 20 otro día 20 y el otro dia
20 y cuando se quede dormido bajara
10 cm y quedara en 50 cm. 20

(Haciendo 1 día 20, otro día 20 y otro día 20. Y cuando se quede dormido bajará 10 cm y quedará en 50 cm)

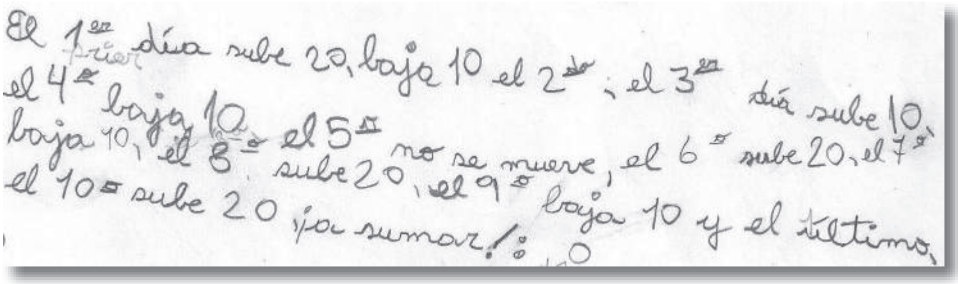




Dado que la primera parte del problema no resulta difícil, la profesora dedica a este ejercicio un periodo de tiempo relativamente breve. Una vez que todos los niños han escrito varias respuestas Marcela hace un alto para que todos los alumnos centren su atención en leer conjuntamente la segunda parte. Algunos estudiantes se han adelantado y ya han comenzado a responder dicha parte, esto facilita que surjan ejemplos de los niños para que el resto de la clase entienda el problema y comience a trabajar.

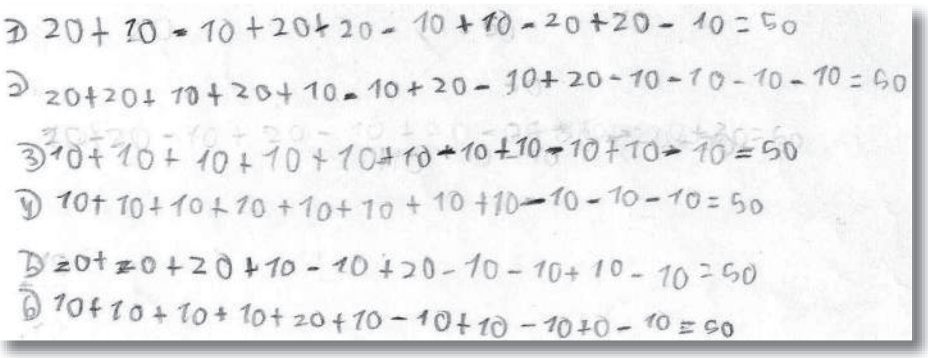
En esta parte surge la estrategia de utilizar el cero para representar que Gary se quedó quieto y usan las respuestas de la primera parte pero le agregan ceros a los días que faltan. También se percatan de que sumar y restar la misma cantidad es otro modo de dejar a Gary donde estaba en un principio, produciendo un movimiento neutro. Entonces si tienen una combinación de números que resulta 50 pueden agregar +10 -10 y producirán una solución diferente a partir de una conocida.

A continuación se exponen algunos de los trabajos de los niños, al observarlos es evidente que algunas formas de representación resultan más convenientes que otras si se quiere escribir una mayor cantidad de soluciones en menos tiempo:

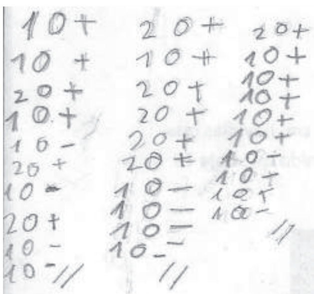


El 1er primer día sube 20, baja 10 el 2do ; el 3er día sube 10,
el 4o baja 10, el 5o no se mueve, el 6o sube 20, el 7o
baja 10, el 8o sube 20, el 9o baja 10 y el último,
el 10o sube 20 ¡a sumar!:

(El 1° día sube 20, baja 10 el 2°, el 3° día sube 10, el 4° baja 10, el 5° no se mueve, el 6° sube 20, el 7° baja 10, el 8° sube 20, el 9° baja 10 y el último el 10° sube 20 ¡A sumar!)



1) 20+10-10+20+20-10+10-20+20-10=50
2) 20+20+10+20+10-10+20-10+20-10-10-10-10=60
3) 10+10+10+10+10+10+10+10-10+10-10=50
4) 10+10+10+10+10+10+10+10-10-10-10=50
5) 20+20+20+10-10+20-10-10+10-10=50
6) 10+10+10+10+20+10-10+10-10+0-10=50



10+	20+	20+
10+	10+	10+
20+	20+	10+
10+	20+	10+
10-	20+	10+
20+	20+	10+
10-	10-	10-
20+	10-	10+
10-	10-	10+
10-	10-	10-
//	//	//

Recomendaciones

Es recomendable que en una primera instancia los niños trabajen solos y en la segunda parte puedan compartir sus resultados en grupo para comentar sus soluciones y conocer las estrategias que han empleado sus compañeros. Esto les permitirá entender que hay distintos modos de representación, unos más eficientes que otros, y pueden inspirarse en el trabajo de sus pares para crear nuevas formas de representación.

Es importante que al pasar a la pizarra y anotar sus resultados sea el curso quien verifique si las respuestas son correctas o no.

El profesor deberá poner especial énfasis en que los alumnos compartan y expliquen la o las maneras que eligieron para representar sus respuestas.

Problema 8:

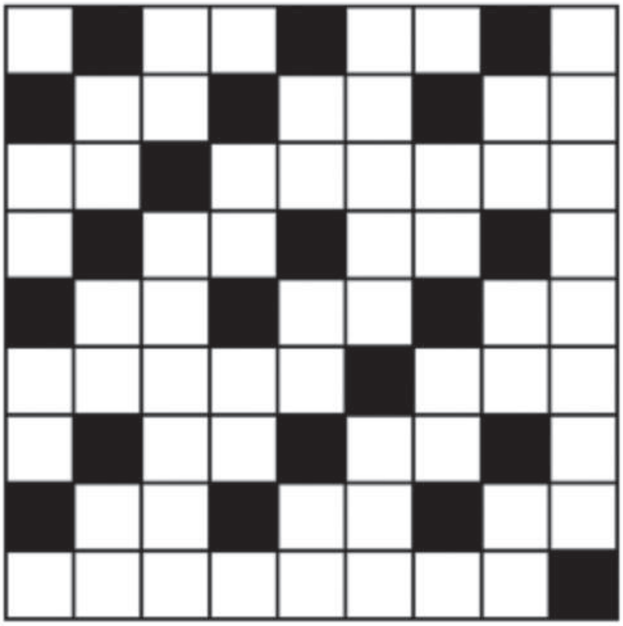
CONTAR CUADRADOS

Nivel en que fue implementado: 4º Básico

Enunciado

Parte 1

a) ¿Cuántos cuadrados blancos hay en el tablero?



Parte 2

b) ¿Cómo obtuviste el resultado?

Parte 3

c) Inventa tantas maneras posibles de contar los cuadrados de forma que puedas obtener el resultado que calculaste anteriormente.

Objetivos

I. Desarrollar comprensión y destreza matemática.
Se espera que los y las estudiantes logren:

- Reconocer la importancia de desarrollar una representación simbólica eficiente tanto para trabajar como para comunicar sus resultados.
- Encontrar patrones matemáticos y utilizarlos para arribar al resultado.
- Ser capaces de expresar verbalmente los procedimientos utilizados.

II. Fomentar la creatividad.

La pregunta en que se centra esta tarea no tiene que ver con llegar a un resultado, pues éste aparece en una primera instancia y no demanda mucho esfuerzo, sino que el objetivo está puesto en buscar distintas formas de llegar a un resultado conocido. Esto enfrenta a los niños y niñas a varios escenarios novedosos y movilizadores de destrezas poco ejercitadas en la clase de matemática.
El hecho de estar mirando por largo tiempo el dibujo hará aparecer nuevos y creativos modos de conteo que seguramente sus profesores no habían visualizado en un principio.

III. Desarrollar la confianza en su capacidad de hacer matemática.

En este problema todos los estudiantes podrán obtener una solución, por simple que ésta sea, sin embargo se espera que puedan aportar con otras más complejas basadas en optimizar el tiempo en que se obtiene el resultado. Al ver las soluciones que obtiene sus compañeros los estudiantes se inspirarán y se les ocurrirán respuestas nuevas. Estos logros deben ser destacados por el profesor.

Instrucciones

Entregar la hoja con el problema a los estudiantes y leerlo entre todos. Es esperable que la primera forma de obtener la respuesta sea mediante conteo.

Dar un tiempo breve para realizar las tareas 1 y 2, y centrar la clase en el desarrollo de la tarea 3.

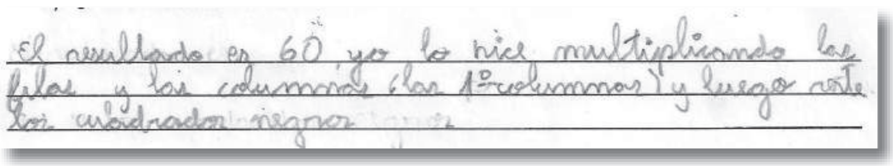
El profesor deberá incentivar a los alumnos en la búsqueda de nuevas estrategias y guiarlos en la escritura de sus respuestas.

Además, se deberá monitorear constantemente el avance de los estudiantes y ayudar a la comprensión de la tarea mostrando los ejemplos que dan los niños.

Descripción de la clase

La clase del profesor Manuel comienza con la entrega del problema y su lectura de forma grupal. Rápidamente los estudiantes responden la primera pregunta: “hay 60 cuadrados blancos”. Al consultar cómo lo hicieron, algunos responden que lo han resuelto por conteo. Todos parecen haber obtenido el resultado de la misma manera. Por lo que las dos primeras actividades se resuelven en poco tiempo y sin presentar dificultad alguna.

La tercera parte del problema es la principal y la que ocupará la mayor parte de la clase. Algunos alumnos comprenden lo que se les está pidiendo y comienzan a entregar respuestas como la que aparece en la imagen a continuación:


El resultado es 60 yo lo hice multiplicando las filas y las columnas (las 1º columnas) y luego reste los cuadrados negros

(El resultado es 60, yo lo hice multiplicando las filas y las columnas y luego resté los cuadrados negros)

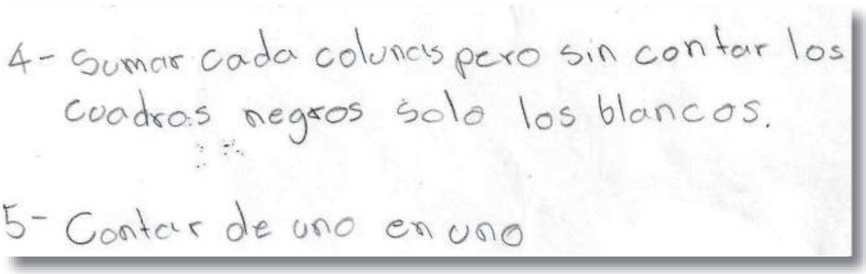
El profesor destaca esta idea haciendo notar que resulta mucho más rápida que contar los cuadritos blancos de uno en uno.

Es poco habitual que la pregunta no vaya dirigida al resultado sino que a mostrar maneras en que se llega a éste, por lo que algunos estudiantes se muestran confusos. El profesor Manuel relata que “algunos alumnos creían que debían hacer ‘algo’ con la figura mostrada en el papel, como construir otro cuadrado, por ejemplo”.

En la medida en que aparecen respuestas que sirven de ejemplo el profesor las comparte con el curso, haciendo que los niños verbalicen sus estrategias, de este modo los estudiantes que estaban inseguros comprenden la actividad y se ponen a buscar sus propios métodos o técnicas.

Muchos estudiantes son capaces de verbalizar y explicar a sus compañeros estrategias muy interesantes, pero al momento de escribirlas tienen dificultades. En esos casos el profesor guía a esos niños para que logren redactar, haciéndolos leer lo que han escrito y analizando si eso es realmente lo que se quiere comunicar.

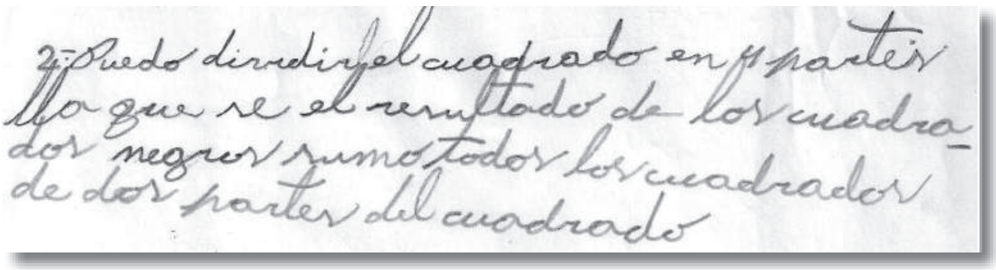
Surgieron varias estrategias poco eficientes, como las de la siguiente imagen, sin embargo son correctas y el profesor lo hace notar.


4- Sumar cada columcis pero sin contar los cuadros negros solo los blancos.

5- Contar de uno en uno

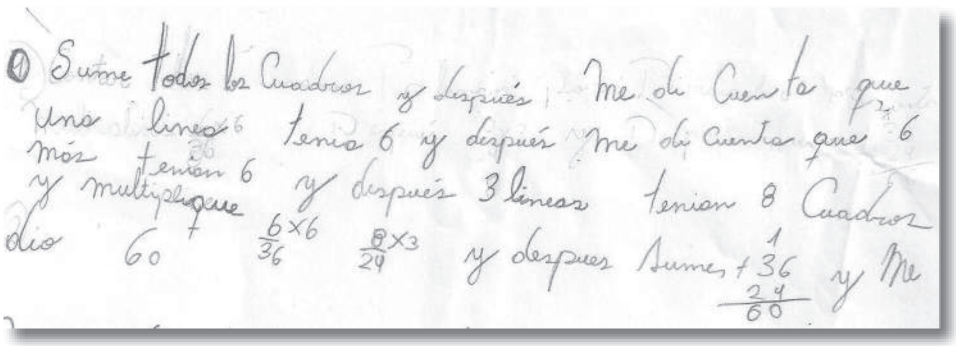
(4- Sumar cada columna pero sin contar los cuadrados negros sólo los blancos.
5- Contar de uno en uno)

Aparecen también estrategias donde no es fácil entender lo que el alumno quiere expresar. El profesor tiene que hacer esfuerzos para entender la idea del niño y ver si tiene sentido.


2- Puedo dividir el cuadrado en 4 partes ya que se el resultado de los cuadra-dos negros sumo todos los cuadrados de dos partes del cuadrado

(2- Puedo dividir el cuadrado en 4 partes ya que sé el resultado de los cuadrados negros, sumo todos los cuadrados de dos parte del cuadrado)

En el siguiente ejemplo el niño explica su idea de manera clara, al ver el dibujo se entiende perfectamente la estrategia propuesta.



(1- Sumé todos los cuadros y después me di cuenta que una línea tenía 6 y después me di cuenta que 6 más tenían 6 y después 3 líneas tenían 8 cuadros y multipliqué 6x6=36 8x3=24 y después sumé 36+24=60)

Recomendaciones

Es común que al haber hallado la respuesta de cuántos cuadrados blancos hay, no se entienda claramente el sentido de buscar nuevas maneras de llegar al mismo resultado. Sin embargo el trabajo que pueden producir los estudiantes es muy valioso en cuanto a las destrezas matemáticas descritas en los objetivos, esto debe ser comunicado a los alumnos centrando la atención en lo ingeniosas que son sus respuestas y en lo importante que es que un niño haya encontrado una regularidad.

Sirve, también, centrar la atención en el tiempo que toman las distintas estrategias para llegar al resultado, los estudiantes se sentirán satisfechos al encontrar métodos que resulten más rápidos que el conteo uno por uno.

Algunos niños intentan “hacer trampa” escribiendo cualquier cálculo que dé 60, por ejemplo: “yo sumé 30 + 30 y llegué a 60”, “yo multipliqué 15 por 4 y me dio 60”. El profesor debe hacer que el alumno explique usando el dibujo de dónde sacó esos números para verificar si el estudiante está proponiendo una estrategia válida o sólo está diciendo cálculos al azar.

Problema 9:

DE CUADRADO A RECTÁNGULO

Nivel en que fue implementado: 4º Básico

Enunciado

Corta en diversas partes un papel lustre cuadrado para que usando los pedacitos recortados, sin que sobre ninguno, se pueda armar un rectángulo.

Encuentra tantas formas como puedas de armar distintos rectángulos con recortes del cuadrado. Los recortes deben ser figuras geométricas.

Objetivos

I. Desarrollar comprensión y destreza matemática.
Se espera que los y las estudiantes logren:

- Realizar cortes en un cuadrado y reordenarlos para formar un rectángulo.
- Crear métodos que permitan cortar un cuadrado de manera que al reordenar las partes se forme un rectángulo.

II. Fomentar la creatividad.

Las infinitas soluciones posibles a este problema y el atractivo visual de los trabajos que pueden construir los niños y niñas, fomenta que los estudiantes intenten producir muchas respuestas. A medida que avanza la clase, el profesor debe motivar a los alumnos a encontrar y mostrar respuestas diferentes a las ya expuestas por sus compañeros. Las respuestas que algunos niños son capaces de construir son muy sofisticadas, en esos casos el docente debe valorarlas haciendo notar la dificultad y el ingenio del trabajo realizado.

III. Desarrollar confianza en su capacidad de hacer matemática.

Para encontrar respuestas a este problema los y las estudiantes cuentan con una instrucción precisa y son los mismos alumnos quienes deben poder identificar cuando un trabajo está correcto y cuando no cumple las condiciones descritas en el enunciado. Además, son los propios niños quienes podrán crear métodos que les permitan generar una mayor cantidad de respuestas.

Instrucciones

Entregar la hoja con el enunciado y un paquete de papel lustre a cada niño.

Cada estudiante deberá tener tijeras y pegamento, también es recomendable que cuenten con regla para que la usen si lo consideran necesario.

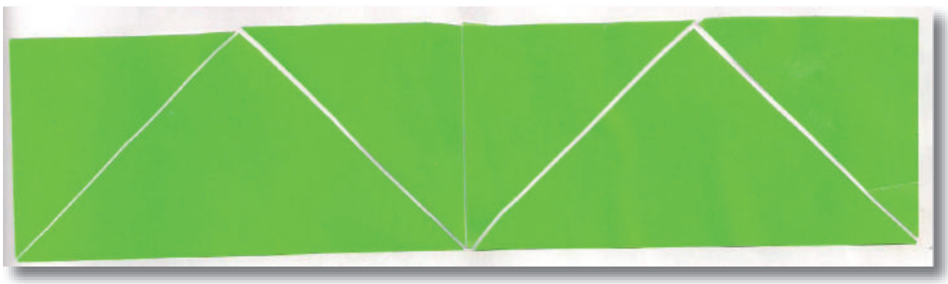
Explicar al curso el problema y pedir que los mismos alumnos den ejemplos. Dar tiempo suficiente para que los niños construyan sus rectángulos, y los peguen en la hoja blanca.

Descripción de la clase

La profesora Cecilia entrega la hoja con las instrucciones y un sobre de papel lustre a cada estudiante. Luego leen el problema entre todos. Rápidamente un niño da un ejemplo, lo que permite que los alumnos que estaban inseguros comprendan mejor la actividad.

La profesora explica que no se debe picar el papel lustre y rellenar un rectángulo, pues esto se detectó como error frecuente en otro curso donde ya se realizó el problema. Además, agrega que para construir el rectángulo cada parte debe ir junto a la otra, no se debe sobreponer los pedazos de papel ni dejar espacios en blanco.

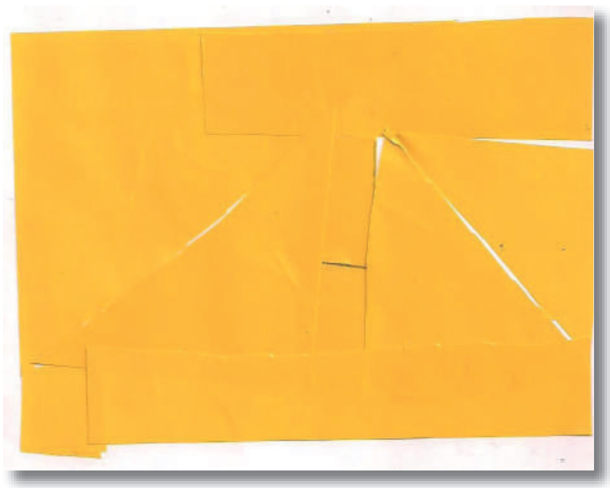
Los niños comienzan a trabajar entusiasmados y algunas respuestas se repiten bastante, como la que se muestra a continuación:



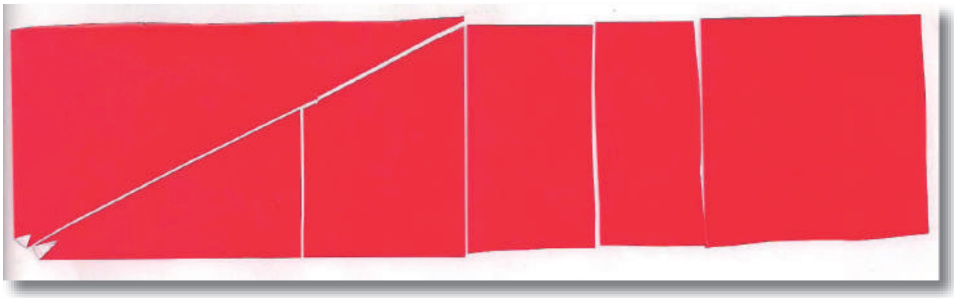
Cecilia incentiva a los alumnos a que produzcan soluciones diferentes a las ya mostradas, entonces comienzan a aparecen soluciones más complejas. Cada vez que un niño quiere mostrar su trabajo al curso se le permite hacerlo, sus pares comentan lo bueno y original de algunos trabajos, lo que los hace sentir contentos y motivados a obtener respuestas creativas, pues recibirán el reconocimiento de sus compañeros.

A veces los estudiantes intentan “hacer trampa” sobreponiendo los papeles unos con otros y tratando de que no se note, o pegando los trozos un poco separados para que visualmente parezca un rectángulo. En estos casos la profesora corrige y motiva al alumno a mejorar su trabajo, en algunos casos en que se muestra al curso tareas incorrectas son los mismos compañeros quienes hacen notar el error.

La imagen que aparece a continuación muestra un trabajo que visualmente podría parecer correcto, pero si se observa bien es posible notar que las puntas de un triángulo quedan bajo otras figuras:



La profesora Cecilia relata que “a medida que avanza la clase y van realizando cortes semejantes a un tangrama, aparecen triángulos, cuadrados, romboides. Surgen rectángulos muy creativos, donde colocan las figuras en distintas posiciones cumpliendo con la condición. Resultaron rectángulos fantásticos en donde aparecen las figuras del tangrama, sin ellos tener mayor conocimiento de las partes de este recurso matemático.”



Al final de la clase los niños están motivados creando soluciones nuevas y siguen trabajando aún cuando deben salir a recreo.

Recomendaciones

Hay errores comunes que el profesor puede detectar y ayudar a que no ocurran enfatizando que eso no es lo que se pide en el problema. Por ejemplo, es común que algunos alumnos piquen el papel en trocitos pequeños y rellenen un rectángulo que dibujaron previamente. Si este procedimiento se hiciera tomando medidas y calzara perfecto la solución sería correcta, pero lo que hacen es más bien rellenar el rectángulo de modo descuidado.

Otro error común es sobreponer las piezas y tratar de que no se note, o dejar espacios en blanco disimulando que en verdad no es posible formar un rectángulo con esos cortes (no confundir con los cortes correctos pero pegados en el papel con algo de separación). En estos casos el profesor debiera hacer que el niño se dé cuenta de su error e intente arreglar la solución que tiene o cree una nueva.

Es importante que el profesor motive a los estudiantes a hacer respuestas originales y no repitan las soluciones más sencillas creadas por sus compañeros, para esto deberá valorar la originalidad de los trabajos mostrándolos al curso.

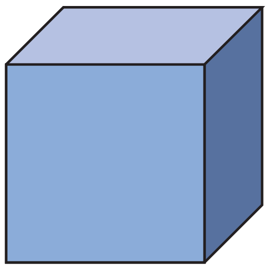
Problema 10:

CUERPOS GEOMÉTRICOS

Nivel en que fue implementado: 4º Básico

Enunciado

Los cuerpos geométricos pueden construirse usando pajitas (bombillas) como aristas y pelotitas de plasticina como vértices. Por ejemplo, para construir un cubo se necesitan 12 pajitas y 8 pelotitas de plasticina. (Observen la siguiente figura)



1) Construye cuerpos geométricos, en donde uses a lo más 12 pajitas. Para cada arista debes usar sólo una pajita.

2) Observa los sólidos que construiste y haz una tabla con el número de pajitas y pelotitas de plasticina que usaste para cada cuerpo geométrico.

3) Haz la mayor cantidad de cuerpos geométricos que puedas usando a lo más 12 pajitas.

Nota: Para un cuerpo geométrico todas las pajitas deben ser del mismo largo.

Objetivos

I. Desarrollar comprensión y destreza matemática.
Se espera que los y las estudiantes logren:

- Construir cuerpos geométricos respetando las condiciones descritas en el enunciado.
- Verificar si las soluciones aportadas por sus compañeros cumplen las condiciones descritas.
- Organizar la información en una tabla de datos.

II. Fomentar la creatividad.

Para resolver este problema los estudiantes deberán experimentar con los materiales dispuestos para crear la mayor cantidad de cuerpos geométricos que puedan, esto representa un desafío que demanda creatividad, sobre todo, al intentar producir cuerpos geométricos distintos al resto. Así mismo deberán inventar la manera de organizar la información en una tabla de datos. No se entrega un diseño previo de tabla, sino que son ellos mismos quienes deben crear un modo de hacerlo.

III. Desarrollar confianza en su capacidad de hacer matemática.

Intentar encontrar cuerpos geométricos novedosos y constatar que la mayoría ya ha sido nombrado y clasificado, hará que los estudiantes comprendan que la humanidad ha “descubierto”, o más bien, identificado estos objetos tridimensionales mesclando las variables de las que disponen: vértices, aristas, caras. El hecho de que sean ellos mismos quienes logren llegar a construir dichos objetos los acerca al proceso desde donde surgen, ayudando a que su percepción de la matemática se transforme de una disciplina lejana a un saber donde ellos por sí mismos pueden arribar a algunas conclusiones importantes.

Instrucciones

Para realizar este ejercicio cada niño deberá contar con plasticina y pajitas previamente cortadas todas del mismo tamaño, se aconseja que sean de 4 o 5 cm aproximadamente. Se recomienda que cada estudiante tenga muchas pajitas, se debe considerar que en cada cuerpo geométrico empleará entre 4 y 12 pajitas, y no debiera limitarse por falta de material.

Entregar a cada alumno la hoja con el enunciado, explicar el problema y dejar que los niños trabajen, monitorear sus respuestas verificando que cumplan las condiciones pedidas. El profesor no debe decir que una respuesta está mal sino hacer que los mismos niños puedan percibir sus errores al leer nuevamente las instrucciones entregadas.

Dejar que los estudiantes muestren sus trabajos al resto de la clase, ya que el reconocimiento de sus pares los motiva a seguir.

Cuando hayan formado varios cuerpos geométricos indicarles que construyan una tabla que describa lo que hicieron. Es importante que sean ellos mismos quienes propongan el modo en que organizarán la información en la tabla y no darles una estructura para hacerlo.

Descripción de la clase:

La profesora Jessica comienza la clase entregando una hoja con el problema a realizar. Además, entrega a cada niño plasticina y un montón de bombillas cortadas previamente, todas de la misma medida (5 cm aprox).

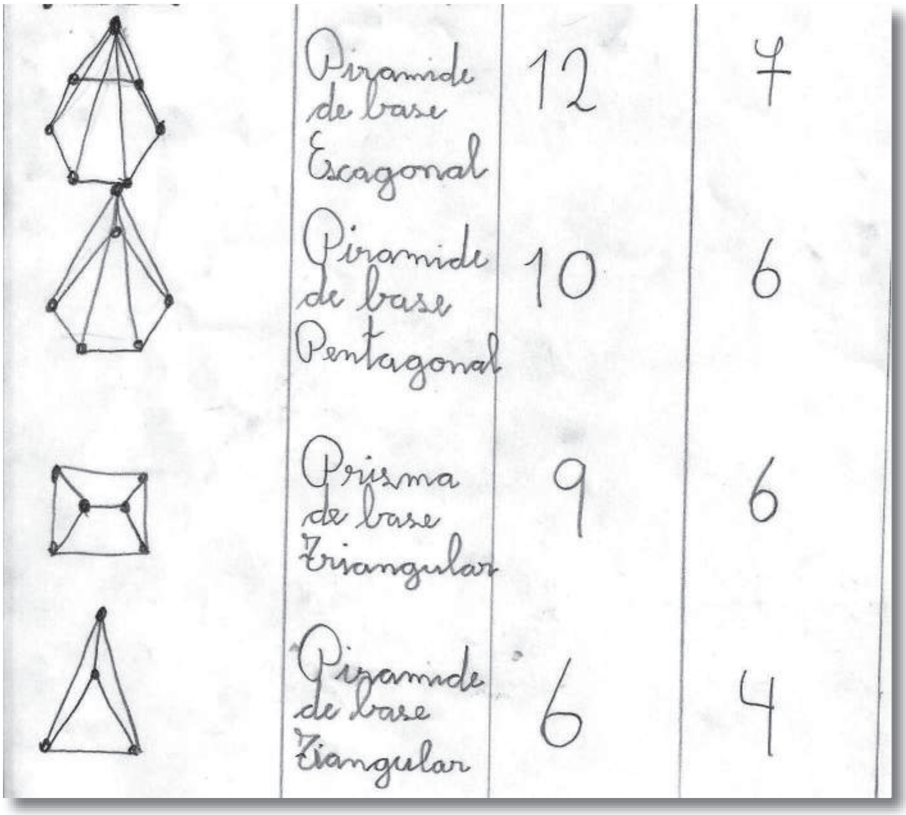
Leen el problema entre todos, rápidamente los alumnos entienden lo que deben hacer y comienzan a trabajar.

Se mantienen muy concentrados en la actividad y todos los estudiantes aportan con soluciones. A algunos les resulta difícil el manejo del material, en esos casos Jessica los ayuda a encontrar una técnica que permita armar los cuerpos de modo que queden firmes.

La profesora recuerda en varios momentos de la clase que todas las aristas deben tener el mismo largo, por lo que no pueden unir o cortar las pajitas. Algunos alumnos intentan construir un paralelepípedo uniendo pajitas para formar una arista más larga. Jessica hace que relean las instrucciones para que puedan corregir su error y armar otra figura que sí cumpla las condiciones.

Los niños arman cubos, prismas, pirámides y anotan los datos pedidos en una tabla. La profesora los ayuda a completarla diciéndoles el nombre de los cuerpos que no conocen.

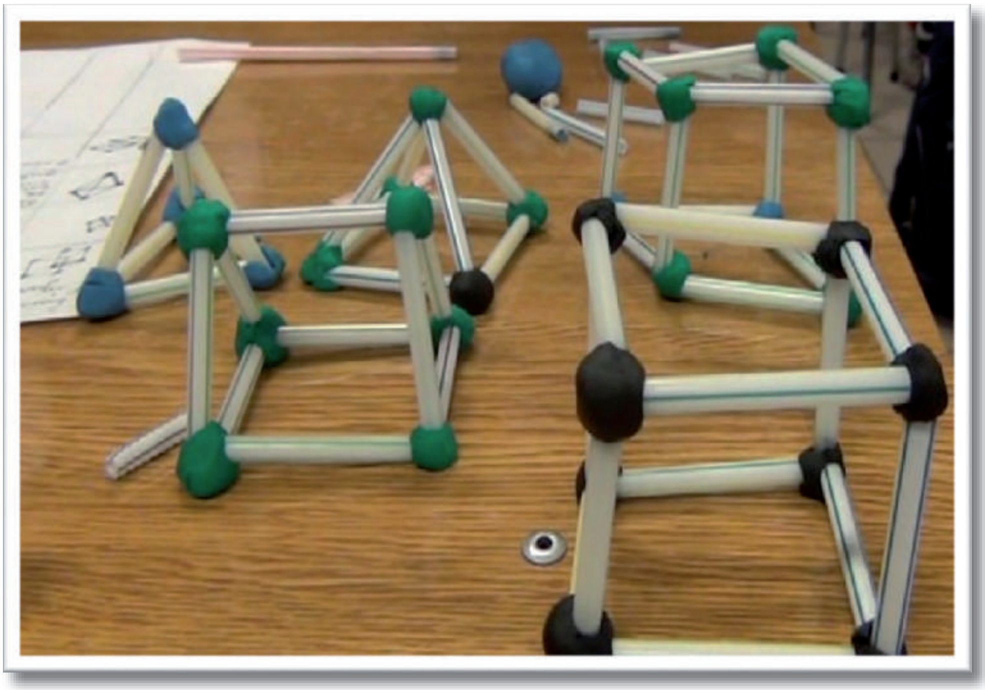
A continuación se muestra la tabla que hizo un estudiante, como ésta no estaba previamente diseñada sino que cada alumno debía construirla, este niño decidió incluir dibujos y nombres de cada cuerpo geométrico.



Cabe hacer notar que la primera solución que muestra esta tabla es incorrecta, pues si se arma un hexágono y se sacan aristas de sus vértices de modo que se junten en un punto, éste quedaría en el mismo plano que el hexágono, es decir no tendría altura. Este error fue bastante frecuente y Jessica propició la discusión al respecto para que los niños pudieran percibirlo.

La profesora Cecilia relata lo que ocurrió en su clase al trabajar en este problema, luego de que los alumnos crearan los cuerpos geométricos más comunes: “al no tener más cuerpos conocidos comenzaron a descubrir nuevas formas, es decir, a crear y darse cuenta que hay otros cuerpos sólidos que tienen características similares a los conocidos por ellos. Lo interesante es que al insistirles que hay más posibilidades, comienzan una etapa de creación libre.”

Al terminar la clase los alumnos no quieren detener el trabajo y continúan creando cuerpos con los materiales que quedan. La actividad resulta motivadora y los estudiantes están orgullosos de su trabajo.



Recomendaciones

Es aconsejable que las pelotas de plasticina con las que los alumnos unirán las aristas sean pequeñas, de lo contrario los cuerpos quedarán menos firmes.

Se recomienda hacer énfasis en la originalidad de las respuestas, por ejemplo, preguntar “¿quién ha construido un cuerpo geométrico diferente al que han mostrado sus compañeros?”. Esto motivará a generar soluciones originales.

Seguramente llegará un momento en que los estudiantes piensen que no encontrarán soluciones diferentes a las que ya tienen, el profesor puede incentivarlos a continuar el trabajo diciendo que existen otras posibilidades.

Problema 11:

LAS BOLITAS

Nivel en que fue implementado: 4º Básico

Enunciado

Parte 1

Ana, Pedro y Juan tienen en total 10 bolitas iguales. Cada uno tiene una cantidad distinta de bolitas. Encuentra tantas maneras diferentes en que esto sea posible.

Parte 2

a) ¿Cómo puedes estar seguro de que encontraste todas las maneras posibles?

Parte 3

b) ¿Y si en vez de 10 tuvieran 30 bolitas, cómo lo harías? ¿De cuántas maneras pueden repartirse las 30 bolitas de modo que cada uno tenga una cantidad distinta?

Objetivos

I. Desarrollar comprensión y destreza matemática.
Se espera que los y las estudiantes logren:

- Encontrar soluciones al problema planteado cumpliendo con las condiciones descritas.
- Concluir que dado un trío de números es posible cambiar su posición de modo que cada trío produzca 6 soluciones distintas.
- Encontrar los 4 tríos de números posibles y entender que la cantidad total de soluciones estará dada por la multiplicación de 6x4.
- Mostrar ejemplos de soluciones que respondan a la repartición de 30 bolitas entre 3 personas.

II. Fomentar la creatividad.

    Si bien este problema tiene una cantidad de soluciones finita y que podemos obtener fácilmente por combinatoria, para un niño de este nivel el problema es un desafío al que se adentrará como pueda, por ejemplo ordenando las respuestas o cambiando las cantidades que obtiene cada personaje. Estas estrategias no son evidentes en un principio y dependen de su capacidad de buscar caminos ingeniosos de solución.

III. Desarrollar confianza en su capacidad de hacer matemática.

    Este problema permite la participación activa de todos los niños y niñas. Mientras que algunos hallarán fácilmente muchas respuestas y podrán ordenarlas de manera que sea posible encontrarlas todas, otros tendrán más dificultades y podrán apoyarse fuertemente en el material concreto. De uno u otro modo todos los alumnos podrán arribar a conclusiones por sí mismos, logro que el profesor debe hacer notar.

Instrucciones

Entregar a cada niño una hoja con el enunciado del problema, junto con 10 bolitas y tres vasos marcados con las letras A, J y P.

Recalcar las condiciones del problema verificando si los ejemplos que surgen de los estudiantes las cumplen.

Dar suficiente tiempo para resolver la parte 1 del problema, la cual debiera ocupar la mayor parte de la clase. Para responder la 2° parte será necesaria la discusión colectiva una vez halladas todas las soluciones posibles. El profesor debe fomentar que los estudiantes justifiquen sus respuestas ayudándoles en la redacción.

La tercera parte del problema es extensa y se espera que los estudiantes den algunos ejemplos. Si se quiere responder a cabalidad quizás sea necesario emplear una clase adicional.

Descripción de la clase

El profesor Juan al comienzo de la clase entrega a cada estudiante el problema escrito en una hoja, junto con 10 bolitas y tres vasos con las iniciales A, J y P, que simbolizan a Ana, Juan y Pedro. Leen la tarea entre todos y pide que alguien dé un ejemplo para ver si comprendieron. Un niño levanta la mano y da una respuesta: “Ana tiene 2, Juan tiene 1 y Pedro tiene 7 bolitas”. El docente pregunta al resto del curso si la respuesta está correcta revisando las condiciones del problema, a lo que todos responden que sí.

Los alumnos comienzan a trabajar concentrados en la tarea y surgen algunas preguntas que el profesor esperaba que aparecieran, una niña propone la siguiente solución: “Ana recibe 8 bolitas, Juan recibe 2 y Pedro cero bolitas”. Los compañeros se dividen entre los que piensan que es correcto y los que piensan que no lo es, algunos dicen que cero no es una cantidad porque si recibe cero no recibe nada.

Previamente se había comentado esta posibilidad en la planificación del ejercicio, se llegó a la conclusión de que al incluir el cero el problema es mayor, por lo que será difícil que encuentren todas las respuestas, así que lo conveniente es no incluirlo. Sin embargo, si algún niño se empeña en incluir el cero en sus respuestas no es incorrecto y habrá que dejarlo, pues en estricto rigor el cero sí es una cantidad.

El profesor propone llegar a un acuerdo sobre si considerarán como algo permitido el darle cero a alguno de los tres personajes, los alumnos opinan que es mejor que no porque todos deben recibir alguna bolita.

Los estudiantes continúan su trabajo y el profesor Juan saca a la pizarra a quienes quieran mostrar algunas de las soluciones que ha encontrado. Al haber varias anotadas en la pizarra, un niño dice que la solución 2-1-7 es igual a 1-2-7 porque son las mismas cantidades. Otro alumno responde que es distinta pues los dos primeros personajes están recibiendo distintas cantidades en cada caso. El curso está de acuerdo con este argumento y el docente enfatiza lo que ha dicho el compañero, dejando en claro que se considerarán como soluciones distintas.

Al escribir en la pizarra las soluciones los estudiantes se dan cuenta de que con cada trío de números encontrado pueden cambiar de posición las cifras y obtener 6 soluciones en total. Como existen 4 tríos de números distintos existen 24 posibilidades de respuesta, pues 6x4=24. Esto les permite convencerse de que han encontrado todas soluciones y pueden responder la parte 2 del problema.

La parte 3 de la tarea es bastante difícil y el profesor no espera que encuentren todas las soluciones, pero sí que logren dar algunos ejemplos. Objetivo que sí se cumple.

La profesora Denisse comenta que en su clase una niña propuso la siguiente conjetura: “Si en vez de 10 bolitas tenemos 30, entonces serían 72 posibilidades, ya que multipliqué 24x3, debido a que 24 son para 10, entonces 48 son para 20, por lo tanto

72 son para 30”. Si bien dicha afirmación es incorrecta, la presunción es interesante y creativa, por lo que la profesora la valora y la propone al curso como una interrogante, los alumnos dudan y no saben si es cierta o falsa. La clase se termina antes de poder analizar la conjetura de la estudiante.

Al final de la clase los niños se quedan satisfechos pues han hallado todas las respuestas al problema y entienden que al aumentar la cantidad de bolitas el ejercicio es más complejo.

Recomendaciones

Apoyar a los alumnos con dificultades con ayuda del material entregado. Algunos estudiantes no requerirán el material para responder el problema y deben ser libres de hacerlo.

Cuando surja la discusión sobre el uso del cero como posible cantidad a repartir, se recomienda que el profesor no imponga una respuesta, en dicho caso es aconsejable dejar que los niños lleguen a un consenso. Si deciden no emplearlo, el problema será más abordable y les permitirá encontrar todas las respuestas, en caso contrario se trabajará con un problema más complejo y es posible que no logren encontrar todas las soluciones, sin embargo igualmente podrán alcanzar logros en cuanto a los objetivos propuestos.

Problema 12:

EL RELOJ

Nivel en que fue implementado: 4º Básico

Enunciado

Parte 1

¿En qué horas la suma de los dígitos en un reloj digital da como resultado seis, en un período de 24 horas? Por ejemplo:

23:01

Parte 2

Describe la estrategia que usaste para encontrar más soluciones. ¿Estás seguro de que encontraste todas las posibles soluciones? ¿Por qué?

Objetivos

I. Desarrollar comprensión y destreza matemática.
Se espera que los y las estudiantes logren:

- Desarrollar estrategias que permitan generar varias respuestas a partir de una solución conocida.
- Comunicar tales estrategias.
- Comprender que para que una respuesta sea válida deberá cumplir las dos condiciones descritas en el enunciado: que los dígitos sumen 6 y que corresponda a una hora que podría aparecer en un reloj digital.
- Argumentar sobre la validez de la estrategia propuesta.
- Argumentar por qué se conocen todas las respuestas posibles al problema, es decir, una vez que creen haber hallado todas las soluciones, justificar cómo se puede estar seguros de que no hay más.

II. Fomentar la creatividad.

 Si bien las respuestas a este ejercicio son finitas y es posible encontrarlas todas, el enfoque está puesto en las distintas estrategias que permiten hallar tales respuestas, estrategias que pueden ser diversas y deben ser dadas por los niños. El profesor tiene que hacer notar el valor de ellas y destacar cuando surjan maneras originales de dar respuesta al problema.

III. Desarrollar confianza en su capacidad de hacer matemática.

 Los estudiantes deben ser quienes califiquen el trabajo que expongan sus compañeros, al verificar que cumplan las condiciones pedidas. Cuando un niño pregunte si sus respuestas están bien el profesor se limitará a guiar releyendo el enunciado junto al alumno, de modo que sea él quien se responda. Se incentiva así la seguridad y la autonomía en cuanto a la veracidad de los resultados logrados.

 El profesor debe recalcar lo valioso que es encontrar una estrategia, por ejemplo al decir "la estrategia de Carlos", el niño sentirá que hizo un trabajo importante, se sentirá autor de algo.

Instrucciones

Leer la primera parte del problema con todo el curso. Analizar el ejemplo que aparece en el enunciado y asegurarse de que todos los estudiantes lo entienden.

Puede que algunos estudiantes necesiten recordar la notación de los relojes digitales y que una hora tiene sesenta minutos. Otro punto importante es que la hora 24:00 nunca aparece, pues después de las 23:59 el reloj muestra 00:00.

Dar suficiente tiempo para desarrollar la primera parte del problema, hasta que los estudiantes piensen que han hallado todas las respuestas. Esto puede ocurrir cuando compartan sus resultados en la pizarra y el curso completo llegue a la conclusión que no hay más respuestas posibles. Sin embargo, asegurar que no hay más soluciones es algo complejo cuya justificación no es trivial, por esto, si hay alumnos que piensan que sí podría haber más respuestas, está bien. Se debe incentivar la discusión al respecto.

Leer entre todos la segunda parte del problema y dar tiempo suficiente para que los estudiantes trabajen en ello.

Descripción de la clase

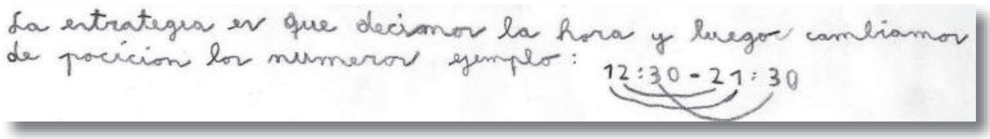
La clase del profesor Domingo comienza con la lectura grupal del problema, se analiza entre todos el ejemplo que aparece en el enunciado. Los estudiantes comprenden rápidamente lo que deben hacer y comienzan a trabajar.

El problema llama la atención de los alumnos, quienes demuestran curiosidad e interés por desarrollar la actividad.

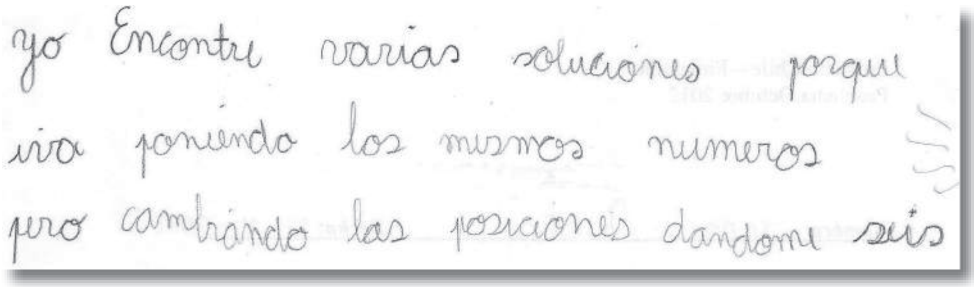
Domingo se asegura de que sean los mismos estudiantes quienes verifiquen si las respuestas que anotan sus compañeros en la pizarra son correctas o no.

Una vez que el curso ha escrito todas las soluciones en la pizarra, se pide que expresen verbalmente las estrategias que utilizaron. En esta parte de la clase el profesor guía la discusión, dejando que los niños argumenten sobre la validez de las estrategias que proponen sus compañeros.

Después de la discusión grupal, se da tiempo para que los alumnos redacten las respuestas a las preguntas que aparecen en la segunda parte del problema. Algunas estrategias descritas por los niños se muestran a continuación:


La estrategia es que decimos la hora y luego cambiamos de pocición los numeros ejemplo: 12:30 - 21:30

(La estrategia es que decimos la hora y luego cambiamos de posición los números.
Ejemplo: 12:30 – 21:30)

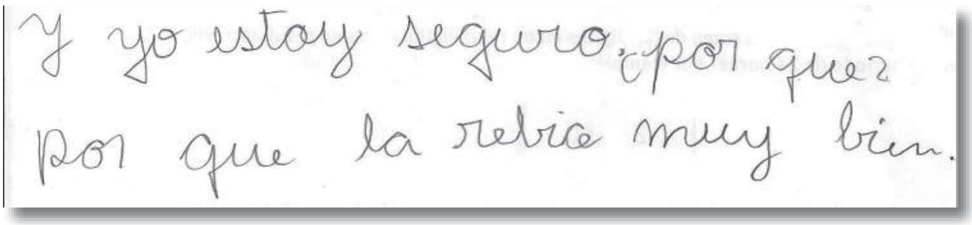

yo Encontre varias soluciónes porque iva poniendo los mismos numeros pero cambiando las posiciones dandome seis

(Yo encontré varias soluciones porque iba poniendo los mismos números pero cambiando las posiciones, dándome seis)

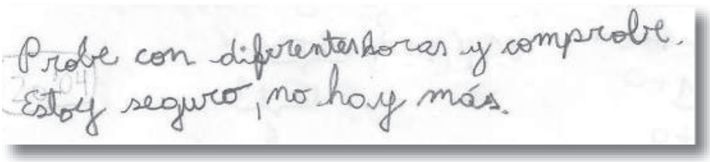
La calidad de las justificaciones que aparecen es variada y depende en gran medida de la profundidad de la discusión previa que se genere. Es importante considerar que responder a las preguntas: "¿Estás seguro de que encontraste todas las posibles soluciones? ¿Por qué?" es bastante complejo, y el único modo de asegurar que las encontraron es mediante un ordenamiento que permita hacer un "barrido" de todas las horas posibles.

Por otra parte, el llegar a establecer que no se está seguro de que se han hallaron todas las respuestas también es una conclusión valiosa.

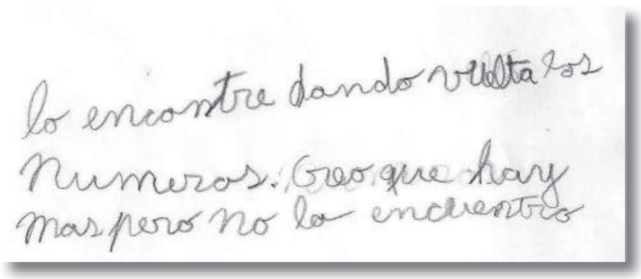
Algunos ejemplos de respuestas obtenidas:



(Yo estoy seguro ¿Por qué? Porque la revisé muy bien)



(Probé con diferentes horas y comprobé. Estoy seguro, no hay más)



(Lo encontré dando vuelta los números. Creo que hay más pero no los encuentro)

Una estrategia empleada por la profesora Marcela, consiste en que los estudiantes muestren sus resultados en la pizarra formando una competencia por filas. La fila que anote más respuestas gana. Marcela señala que esta modalidad de trabajo da resultado con su curso pues "a los alumnos les gustan mucho las competencias y estos problemas se prestan para eso".

Recomendaciones

Es recomendable que el docente conozca bien las estrategias para dar solución al problema planteado, de este modo le será más fácil entender las propuestas de los niños. Pues se debe considerar que es muy probable que les sea difícil comunicarlas con fluidez. Algunas estrategias son las siguientes:

- Una vez que se halla una solución se dan vuelta los números, por ejemplo: de la solución conocida 23:01, permuto los dígitos y verifico cuáles me dan horas posibles. En este caso 23:10 es una nueva solución, al igual que 10:23, 10:32, 01:23 y 01:32. Las horas 32:10 y 32:01 no existen, por lo que las descarto como soluciones válidas.

- Descartar de antemano las horas que tienen números mayores a 6, por ejemplo 07:00, 07:02, etc.

- Una manera de asegurar que se han obtenido todas las respuestas es anotar las horas de manera ordenada, de menor a mayor o a la inversa. Este ordenamiento permite confirmar que se consideraron todas las horas posibles.

Es probable que a los estudiantes les sea difícil comunicar sus respuestas y aún más redactarlas. Se recomienda que el profesor ayude a los alumnos interrogándolos y guiándolos para que sean capaces de escribir lo que responden de modo verbal.

Problema 13:

LA HUERTA

Nivel en que fue implementado: 5º Básico

Enunciado

Tienes un terreno con forma rectangular de 20m por 10m para hacer una huerta con diferentes plantas. Diseña un plano de distribución de las plantas tomando en cuenta las distancias entre ellas. En la hoja que usarás para ello, 1cm corresponde a 1m del terreno. Debes incluir al menos una planta de cada grupo. Para identificarlas en el plano usa distintos colores y símbolos. Explica cómo diseñaste tu plano.

Grupo 1

Color y símbolo	Planta	Distancia entre plantas en el terreno	Distancia entre plantas en el papel	Distancia entre filas en el terreno	Distancia entre filas en el papel
	ajo	20 cm	2 mm		
	zapallo italiano	70 cm	7 mm		
	arveja	30 cm	3 mm	40 cm	4 mm

Grupo 2

Color y símbolo	Planta	Distancia entre plantas en el terreno	Distancia entre plantas en el papel	Distancia entre filas en el terreno	Distancia entre filas en el papel
	frambuesa	150 cm		200 cm	
	parra	200 cm			
	tomate	50 cm			
	sandía	100 cm		150 cm	

Grupo 3

Color y símbolo	Planta	Distancia entre plantas en el terreno	Distancia entre plantas en el papel	Distancia entre filas en el terreno	Distancia entre filas en el papel
	albahaca	7 cm		40 cm	
	perejil	5 cm		20 cm	
	cilantro	4 cm		35 cm	

Objetivos

I. Desarrollar comprensión y destreza matemática.
Se espera que los y las estudiantes logren:

- Realizar un plano a escala de un huerto donde respeten las condiciones descritas en el enunciado.
- Inventar símbolos que les permitan representar los elementos que incluirán en su plano.
- Hacer conversiones de longitudes en que 1 metro equivale a 1 centímetro.
- Resolver las dificultades que aparecen en cuanto a las magnitudes de las medidas involucradas, creando estrategias para poder dibujar lo que se les pide.

II. Fomentar la creatividad.

En la vida diaria cuando debemos resolver situaciones de este tipo nos encontramos con múltiples variables, como números muy pequeños o muy grandes, el ser capaces de lidiar con esas complicaciones implica un pensamiento creativo. Muchas veces los problemas en matemática están hechos pensando en que todo calce de modo sencillo, con tal que el niño encuentre los números que le acomodan para obtener una respuesta bien encaminada. Este ejercicio en cambio, presenta una situación más parecida a las de la vida cotidiana, con múltiples variables funcionando, con medidas complicadas, y el hecho de enfrentar a los y las estudiantes a este tipo de situaciones les hará poner en práctica su capacidad de pensar estrategias nuevas que les permitan resolver el desafío planteado.

III. Desarrollar confianza en su capacidad de hacer matemática.

En este problema los niños y niñas se enfrentan a una situación donde deben tomar decisiones y donde hay muchos caminos posibles según los elementos que decidan incorporar en sus respuestas. Se fomenta de este modo la autonomía del alumno respecto a la solución creada, que será posiblemente única y dependerá de los criterios que haya considerado, respetando las condiciones descritas.
El docente tiene la misión de prevenir que sus estudiantes se frustren al tener complicaciones en el desarrollo del ejercicio, para esto debe estimular a sus alumnos a continuar con la tarea valorando los logros y guiándolos cuando surjan dificultades.

Instrucciones

Entregar la hoja con el problema a los estudiantes, leer y verificar que todos los niños entienden qué es una huerta.

Cada estudiante debe contar con lápiz y regla.

Indicar a los alumnos que primero realicen las conversiones en las medidas pues esto los ayudará a dibujar en el plano de manera correcta.

Además, indicar que inventen símbolos que representen las distintas plantas, esto con el objetivo de que posteriormente puedan utilizar esos símbolos en el plano.

Verificar de manera más personalizada que comprenden el problema, esto puede realizarse al ir observando sus trabajos.

Descripción de la clase

La clase de la profesora Pamela se inicia con la entrega del problema y su posterior lectura. La docente interroga a los estudiantes para percibir qué cosas crean dificultades en la comprensión del enunciado. Algunos niños no saben qué es una huerta, y es otro alumno quien lo explica, todos parecen haber entendido ese punto.

Luego la profesora les sugiere comenzar inventando un símbolo para cada planta y completar la tabla, para saber qué medidas deben utilizar en el plano.

Las dos tareas previamente descritas ocupan el mayor tiempo de la clase. A los estudiantes les resulta compleja la conversión de longitudes, sobre todo porque algunas son muy pequeñas, por ejemplo las del grupo 3, donde aparecen medidas de 4 centímetros que en el plano debieran ser 0.4 mm.

A esto se suma el hecho de que la información involucrada es mucha: distancias entre filas, distancias entre plantas, selección de plantas por grupo. Esto se discutió previamente en la reunión de planificación de los profesores, quienes acordaron estar atentos a la reacción de los estudiantes para evaluar si éste podía ser un problema demasiado complejo. Pamela está consciente de ello pero sigue intentando que sus alumnos trabajen.

Al momento de dibujar el plano, los estudiantes tienen grandes dificultades, logran avanzar y hacer esbozos, algunos logran cumplir con la tarea pedida, sin embargo la gran mayoría de los alumnos no logró realizar el plano al llegar el término de la clase.

Cuando finaliza la hora Pamela opina que ésta no ha sido de las mejores clases y que éste es un problema al cual ella le realizaría cambios. Sin embargo, al analizar el desempeño de los niños la profesora nota que no abandonaron el trabajo en ningún momento y que fueron persistentes en tratar de comprender una tarea realmente complicada. Los estudiantes saben que estas actividades son sin nota y que si no quieren participar no recibirán castigos, pese a ello se empeñaron en no abandonar la tarea. Esta reflexión deja más tranquila a Pamela. En el análisis posterior todos los profesores que aplicaron este ejercicio tienen opiniones y experiencias similares, por lo que concluyen que quizás esa persistencia sea un logro del trabajo realizado.

Recomendaciones

Dado que este es un problema desafiante, es importante considerar el dominio que tenga el curso de los conceptos involucrados en esta tarea. Si el docente que implementará este ejercicio lo considera necesario puede hacer modificaciones en cuanto a las medidas.

Es importante observar continuamente el avance de los estudiantes en el desarrollo del ejercicio, guiar a quienes se sientan inseguros y mostrar el trabajo de quienes logran generar alguna solución.

De estimarse necesario, se puede emplear dos clases en resolver este problema.

Una buena idea es dedicar clases anteriores a este trabajo a ejercitar conversiones de medidas y dibujo de planos, de este modo los estudiantes tendrán más apropiados los conceptos involucrados.

Problema 14:

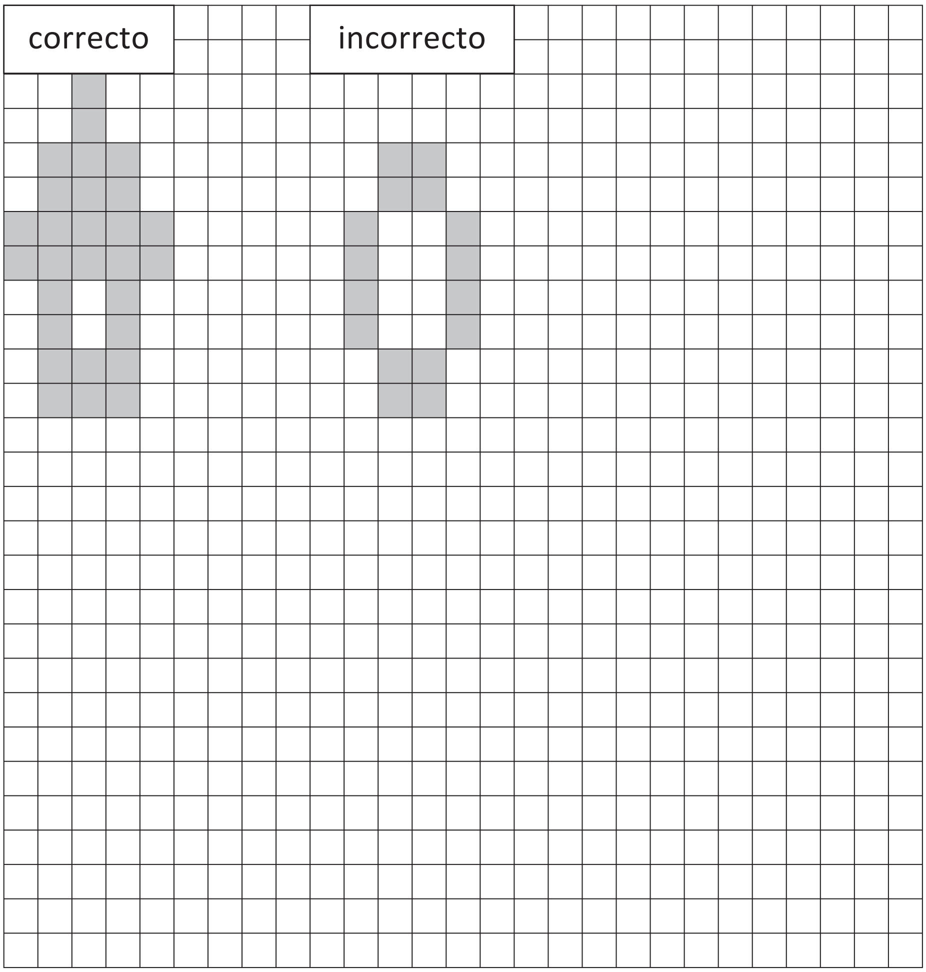
PENTOMINÓS

Nivel en que fue implementado: 5º Básico

Enunciado

Parte 1

Construye 3 figuras en el plano utilizando sólo cuadrados. Píntalas de modo que el lado de un cuadrado coincida con el lado de otro (observa el ejemplo correcto y el incorrecto).



Parte 2

Una figura plana formada por cinco cuadrados se llama *pentominó.* Utiliza la cuadrícula para dibujar los pentominós que has encontrado. Hay un total de 12 pentominós diferentes. ¿Puedes encontrarlos todos?

Parte 3

Una tarea adicional

Trata de construir un rectángulo con 3 o más pentominós. ¿Cuántos rectángulos diferentes puedes hacer?

Objetivos

I. Desarrollar comprensión y destreza matemática.
Se espera que los y las estudiantes logren:

- Identificar figuras que han sido rotadas o reflejadas.
- Hallar las 12 figuras que pueden obtenerse uniendo 5 cuadrados del modo que indica el enunciado del problema.
- Visualizar mentalmente las figuras para hacerlas encajar de modo tal que formen un rectángulo.

II. Fomentar la creatividad.

En la tercera parte del problema los niños y niñas serán libres de emplear las figuras que encontraron (los doce pentominós) como mejor les parezca con el fin de generar un rectángulo. Los estudiantes lo relacionan con el juego "tetris" con el que algunos están familiarizados, esto los hace entrar en la dinámica de este juego y los motiva a buscar soluciones novedosas, no presentadas anteriormente.

III. Desarrollar la confianza en su capacidad de hacer matemática.

Este problema resulta muy motivador para los y las estudiantes, pues desafía cognitivamente a los alumnos involucrándolos completamente en la tarea que realizan. En general, todos los niños participan y el ejercicio ayuda a fomentar la discusión entre pares respecto a la validez de las soluciones.

Instrucciones

Entregar a cada niño las guías con el problema y leer las instrucciones de la parte 1 del enunciado.

En esta actividad los estudiantes tienen que comprender cuándo una figura es correcta, para ello deben realizar varias figuras libremente, el profesor hará que el niño se dé cuenta de su error en caso de que una de ellas sea incorrecta, para ello le preguntará al niño si su dibujo cumple las condiciones, o hará que el curso opine sobre si el trabajo mostrado es correcto o no. Esta parte de la tarea no representa un gran desafío por lo cual debe darse poco tiempo. Cuando todos los alumnos comprendan que las figuras deben tener todos los cuadrados unidos a otro al menos por un lado se puede pasar a la parte 2 del ejercicio.

En la segunda parte se presenta el pentominó. Leer la definición e incentivar a los estudiantes a buscar los doce pentominós existentes. Hacer notar que las reflexiones y rotaciones a las figuras encontradas no generan soluciones distintas, sino que se cuentan como la misma figura.

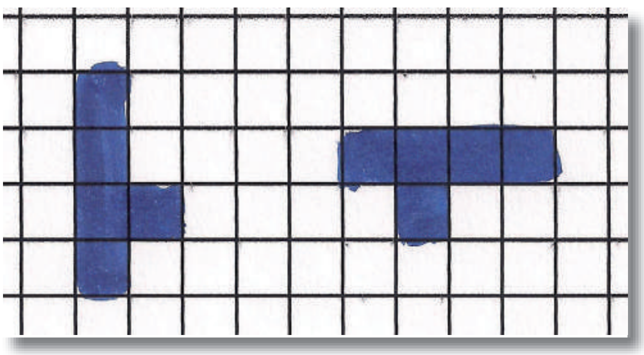
Una vez que se han encontrado los 12 pentominós, pasar a la tercera parte del ejercicio donde los estudiantes deberán juntar tres o más pentominós para armar un rectángulo.

Descripción de la clase

La clase de la profesora Silvia comienza con la entrega de las guías que describen las actividades. Leen en conjunto la primera parte. A medida que los alumnos van creando figuras las muestran al resto de sus compañeros, quienes juzgan si lo ha hecho bien o mal. Las figuras mostradas sirven como ejemplo para que todos comprendan la tarea. Una vez que todos los niños tienen al menos 3 soluciones la profesora decide pasar a la siguiente actividad.

Silvia les explica a sus alumnos que un "pentominó" es una figura plana formada por 5 cuadrados unidos por al menos uno de sus lados, y que el desafío es encontrar los 12 que existen. Lo niños comienzan a trabajar en resolver el problema. A medida que avanzan la profesora permite que anoten en la pizarra las soluciones que encuentran, pero tiene cuidado de que no se muestren todos los resultados demasiado pronto para que todos tengan la oportunidad de hallar alguno por sí mismos.

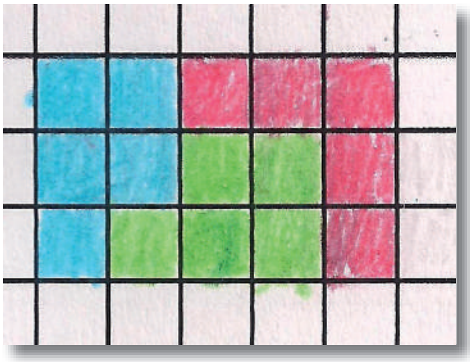
Cuando dos alumnos dibujan en la pizarra pentominós congruentes, como los que pueden verse en la figura a continuación, la profesora tiene la oportunidad de explicar que realmente son el mismo, así que valen como uno solo, pues el segundo se obtiene rotando el primero. Los estudiantes entienden y siguen buscando soluciones.

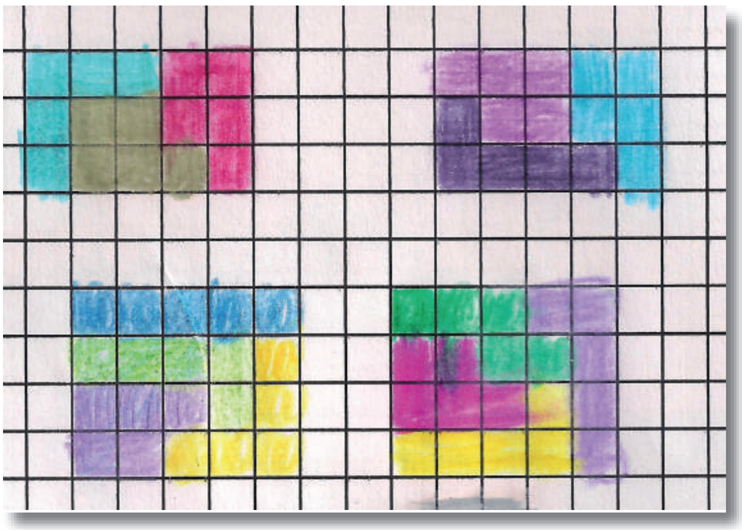


Cuando en la pizarra ya hay 10 pentominós dibujados, comienzan a repetirse las respuestas y son los mismos niños quienes hacen notar cuando una solución está repetida, pero finalmente logran encontrarlos todos. Los alumnos revisan sus hojas para ver si sus respuestas son las mismas, si es necesario agregan las que les faltan. Una vez que han hallado los 12 pentominós pasan a la siguiente actividad.

La profesora lee las instrucciones y los estudiantes comprenden rápidamente lo que deben hacer. Un niño da un ejemplo y Silvia lo muestra al curso. Los alumnos trabajan muy concentrados y motivados en la actividad, todos logran aportar con soluciones.

A continuación se muestran algunas soluciones a la tercera parte del problema:





En la reunión posterior, donde se evalúa y analiza la actividad, la profesora Cecilia comenta que "en este problema los niños trabajaron muy motivados, incluso los alumnos que generalmente tienen más dificultad en clases de matemática se sintieron capaces de crear y lo lograron de manera muy satisfactoria". Sus colegas comparten el análisis.

Recomendaciones

Resulta de mucha ayuda que el profesor tenga una lista con los dibujos de los 12 pentominós, pues es fácil confundirse en la clase.

Es conveniente hacer notar cuando dos pentominós son el mismo rotado o reflejado, esto lejos de ser un inconveniente, resulta una herramienta importante para tratar la rotación o reflexión en geometría, temas complejos y que en este ejercicio aparecen como un juego.

Los niños suelen hacer la relación entre esta actividad y el juego "tetris", esa relación puede resultar conveniente y ayudarles a resolver la tercera parte.

Problema 15:

CADENAS DE NÚMEROS

Nivel en que fue implementado: 5º Básico

Enunciado

De un número construimos otro número como sigue: Los dígitos del número se multiplican por sí mismos y se suman. Por ejemplo:

7 –› 7.7 = 49 ,   49 –› 4.4+9.9 = 97 ,   97 –› 9.9+7.7 = 130 , ...

Repitiendo este procedimiento se construye una cadena de números:

7 –› 49 –› 97 –› 130 –› ...

Parte 1.- Completa la cadena anterior.

Parte 2.- Completa las cadenas que comienzan con los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, con el mínimo de cálculos posibles.

Parte 3.- ¿Cuál es el mínimo de números que hay que calcular para construir todas las cadenas de los números del 1 al 9? ¿Cuál es la cadena más corta y cuál la más larga que obtuviste?

Objetivos

I. Desarrollar comprensión y destreza matemática.
Se espera que los y las estudiantes logren:

- Descubrir las regularidades en los resultados que arroja el ejercicio. Los cálculos que se deben realizar para obtener todas las cadenas de números son muchos, eso mismo motivará a los estudiantes a percatarse de las regularidades que aparecen, las que pueden aprovechar para ahorrarse trabajo y esfuerzo. Este aspecto constituye el objetivo principal del problema.

- Concluir que dos números distintos que se componen de los mismos dígitos, serán seguidos en la cadena por un mismo número. Por ejemplo 13 y 31, en ambos casos el número que sigue es 10, puesto que 3x3+1x1=1x1+3x3.
- Notar que, una vez que completaron algunas cadenas, pueden aprovechar los resultados para ahorrar cálculos en las siguientes, pues cuando se llega a un número los que le siguen son los mismos, por lo que no es necesario realizar nuevamente el ejercicio matemático.
- Ordenar las respuestas de modo que sean comprensibles y puedan comunicarlas al curso.

II. Fomentar la creatividad.

Si bien en este problema se deben hacer cálculos precisos, y todos los niños y niñas tienen que llegar a las mismas respuestas, el hecho de que haya tantos cálculos matemáticos involucrados creará la necesidad en el alumno de inventar formas de ahorrar trabajo, estas estrategias no son sabidas ni enseñadas de antemano sino que surgirán del propio ingenio de los estudiantes.

III. Desarrollar la confianza en su capacidad de hacer matemática.

En el desarrollo de esta actividad los y las estudiantes trabajan por indagación, sin saber muy bien qué resultado pueden esperar, ni hasta qué número deberán seguir calculando. Al avanzar en el trabajo los alumnos se percatan de aspectos muy relevantes, que son percibidos a veces sin necesidad de que el profesor se los haga notar, estos aspectos se hacen claves a la hora de resolver el problema. Los niños quedan con la grata sensación de haber descubierto por sí mismos las regularidades que les permitieron resolver el enigma.

Instrucciones

Entregar el problema completo al inicio de la clase, es conveniente que los estudiantes pueda leer todas las preguntas antes de comenzar a desarrollar el ejercicio, pues realizarán los cálculos teniendo en consideración que el número de elementos de cada cadena es un aspecto importante y que más adelante deberán responder, esto los hará anotar de modo cuidadoso sus resultados.

Leer entre todos el enunciado y analizar el ejemplo que aparece, de modo que el curso completo pueda comprender cómo se obtiene cada número de la cadena.

Dar un tiempo breve para que los alumnos realicen la tarea 1 y puedan revisarla entre todos. Al finalizar dar la instrucción de comenzar el siguiente ejercicio.

La segunda tarea toma bastante tiempo y probablemente ocupará el grueso de la clase. Durante el desarrollo de ésta el profesor deberá permitir que los niños comparen sus resultados, eso les dará seguridad en los cálculos que realizan y les permitirá detectar errores tempranamente.

Una vez que han avanzado lo suficiente en el desarrollo del ejercicio, el docente deberá sacar alumnos a la pizarra a escribir las cadenas de números, de esta forma todo el curso podrá ir verificando sus resultados.

Con los resultados en la pizarra será fácil responder a la tarea 3. Dejar que los niños discutan y argumenten.

Descripción de la clase

La clase de la profesora Marcela se inicia con la lectura del problema y el análisis del ejemplo que aparece en el enunciado. Una vez que todos comprenden la actividad comienzan a trabajar. Al principio resuelven el ejercicio de forma individual y comentan con sus compañeros de vez en cuando, esto les sirve para verificar sus respuestas.

Es común que los estudiantes piensen que los resultados serán cada vez mayores y no saben muy bien hasta cuándo seguir. Tras varios intentos, algunos niños notan que a veces resulta un número menor y finalmente siempre se llega a repetir uno de los números de la cadena. Cuando llegan a esta parte entienden que terminaron esa cadena y que deben continuar con la siguiente.

En la clase de la profesora Nancy un grupo de alumnos descubre este hecho con gran entusiasmo. Entienden que encontraron algo muy importante, lo comentan entre pares con asombro y llaman a la profesora para explicarle orgullosos lo que pudieron deducir.

Además, al realizar varias cadenas se percatan de que los resultados que ya obtuvieron pueden ser nuevamente utilizados, pues al repetirse un número todos los que siguen son iguales.

Marcela relata que en su clase “algunos niños notaron que las operaciones que debían realizar ya estaban resueltas en las cadenas anteriores, de esta manera el trabajo les resultó más simple y rápido. Los alumnos explicaron a sus compañeros este descubrimiento".

La tarea 2 ocupa el mayor tiempo de la clase, puesto que deben hacer muchos cálculos, pero una vez que los niños obtienen las respuestas las siguientes tareas les resultan más sencillas y sirven para promover la discusión del grupo y verificar que lo hicieron bien o corregir en caso contrario.

Finalmente, los estudiantes pasan a la pizarra a escribir sus resultados, se equivocan con frecuencia y sus compañeros les ayudan a corregir. Una vez que todo el curso está de acuerdo con las cadenas obtenidas para cada número se discute la tarea 3 de modo grupal.

Recomendaciones

Es conveniente que el profesor enfatice que el ahorrar trabajo en cuanto a los cálculos realizados es un hecho positivo, y las estrategias para conseguirlo deben ser valoradas.

El uso de calculadora puede facilitar que la energía y el tiempo no se pierda realizando cálculos, por lo que no se descarta permitir su utilización.

Se debe incentivar que los niños realicen sus anotaciones de manera ordenada, pues es fácil confundirse si se anotan los resultados de manera engorrosa.

El error más frecuente en los alumnos es obtener mal los resultados por haber multiplicado o sumado de forma incorrecta. Es importante que, pese a ello, el profesor motive a los estudiantes a seguir completando las cadenas, para eso debe hacer ver que es un error común y restarle importancia, enfatizando que, por lo mismo, el encontrar estrategias es conveniente.

PROFESORES Y ALUMNOS PARTICIPANTES

Profesora Denisse Torres Morales - 5º Básico B, Escuela Básica Grenoble. Quinta Normal

Profesor Juan Fernández Díaz - 5º Básico A, Escuela Básica Grenoble. Quinta Normal

Profesora Nancy Alegría Cortés - 5º Básico A, Escuela Gran Avenida. San Miguel

Profesor Domingo Alfaro Riquelme - 5º Básico A, Escuela Básica Calicanto. Quinta Normal
(Ausente en la fotografía)

Profesora Luzmira troncoso Reveco - 5º Básico B, Escuela Básica Calicanto. Quinta Normal

Profesora Silvia Cepeda Donoso - 5º Básico C, Escuela Básica Lo Franco. Quinta Normal

Profesora Cecilia Maldonado Méndez - 5º Básico A, Escuela Básica Lo Franco. Quinta Normal

Profesora Marcela Fernández Castro - 5º Básico A, Escuela Elvira Hurtado de Matte. Quinta Normal

Profesora Pamela Méndez Pastrián - 5º Básico A, Escuela Francisco Andrés Olea. Santiago

Profesor Manuel Díaz Glaves- 5º Básico A, Escuela Básica Inglaterra. Quinta Normal

Profesora Jessica Núñez Godoy - 5º Básico B, Escuela Básica Inglaterra. Quinta Normal