IMA

Centro de Investigación Avanzada en Educación
Universidad de Chile

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO

Seminario de Enseñanza y Aprendizaje de Stem integrado

Espacio de trabajo Matemático : identificación y construcción

Elizabeth Montoya Delgadillo

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Ecos-Sud C13H03

Plan de la exposición

1. La Identificación de fenómenos : función exponencial
2. Elementos teóricos ETM (ETM_A)
3. La construcción : La situación aplicada

4. Algunas conclusiones

Introducción…el contexto..

Las sucesiones

La integral

La exponencial

Objetos matemáticos en distintos dominios :
D. Fuente –
D. Resolución

Función continua (o la continuidad)

Pasaje de la arimética al álgebra

(Derouet, Menares, Rousse, Verdugo, Gaona, Loeng, Gamboa).
PUCV ; Paris Diderot

I.- Identificación…

- Se introduce esta función como
  una “expresión” que modela problemas poblacionales y problemas de economía;
  (Matemática, Ingenierías, ..)

- fenómeno de la dialéctica discreto-continuo
  no se cuestionan (ni justifican), a nivel de enseñanza, la continuidad de esta función

Perspectiva estructural : Dialéctica discreto – continuo
Perspectivas de localidad : global - local – puntual

I La función exponencial

¿De qué manera se realiza el paso q^n a q^x?

- Segundo Medio

En la primera unidad (texto escolar) de segundo medio: “Números y Raíces”, se abordan los números reales como la unión de los números racionales e irracionales, luego se estudian las potencias de exponente racional y raíces enésimas, solucionando el paso de q^n con $n \in Z$ a q^x con $x \in Q$ (racionales).

La relación entre raíces enésimas y potencias de exponente racional se realizan de manera numérico-algebraica, en donde se llegan a algunas generalizaciones.

EN RESUMEN

- Si a es un número real y n un número natural, entonces la expresión $\sqrt[n]{a}$ denota al número cuya potencia enésima es a.
$$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$$
- Si $a \geq 0$ y n un número par, $\sqrt[n]{a}$ existe y es siempre un número positivo.
- Si $a < 0$ y n un número par, $\sqrt[n]{a}$ no es un número real.
- Cuando n es un número impar, $\sqrt[n]{a}$ conserva el signo de a y es siempre un número real.
- Al número n se le llama **índice**, y al número a se le llama **cantidad subradical**.

EN RESUMEN

En general:

- Si $n \neq 0$, entonces $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- Si $n \neq 0$, entonces $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

En resumen

Una **raíz enésima** puede relacionarse con una **potencia de exponente racional**, como se muestra:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^m$$

Al considerarla así, es posible aplicar las propiedades de la multiplicación y división de potencias.

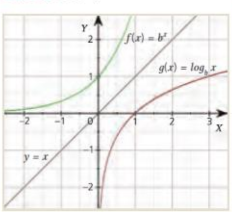
- Cuarto Medio

la función exponencial se introduce mediante un problema biológico de crecimiento de la población

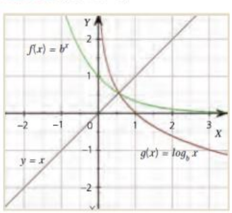
Posteriormente, se introduce un estudio previo de funciones y sus gráficos, recordando lo estudiado en los otros años, existiendo en todo momento una representaciones gráfico y algebraicas.

- $f(x)=a^x$, con $a>1$
- $f(x)=a^x$, con $0< a<1$

Caso I: Si $b > 1$



Caso II: Si $0 < b < 1$



Dada $y=a^x$, con $a>0$, $a \neq 1$, se determina la función inversa, para esto se puede despejar x en términos de y.

$$y = a^x \quad \text{se aplica logaritmo ya que } y \text{ y } a \text{ son números positivos}$$
$$\log y = \log a^x$$
$$\log y = x \cdot \log a \quad \text{ya que } a \neq 1$$
$$x = \frac{\log y}{\log a} \quad \text{utilizando la propiedad de cambio de base, se tiene que}$$
$$x = \log_a y$$

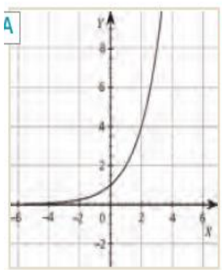
Para escribir la función inversa, se remplaza x por y. Luego, $y^{-1} = \log_a x$.

Una función exponencial se representa por $f(x) = a^x$, con a perteneciente $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ y x perteneciente a $\mathbb{R}$.

Algunos extractos de textos escolares

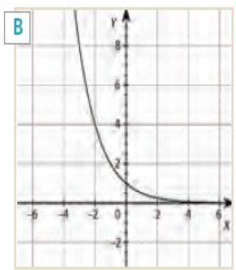
Observa las siguientes gráficas:

A



x	y
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

B



x	y
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

ANALICEMOS...

- A partir de la gráfica, en cada caso, ¿cuál es el valor de y para $x = -2$?, ¿para $x = 0$?, ¿y para $x = 1$?
- En cada caso, ¿qué sucede con el valor de y a medida que x aumenta?, ¿y a medida que disminuye? Explica.
- ¿Cuál podría ser el dominio y el recorrido de cada función?
- Según la gráfica, ¿se interseca cada función con cada uno de los ejes?, ¿en qué puntos?
- ¿Qué semejanzas y diferencias observas entre las gráficas?
- Estas gráficas, ¿se parecen a las gráficas de alguna función que conozcas?, ¿por qué?

Las gráficas anteriores son ejemplos de la función exponencial.

Un método posible para determinar la expresión algebraica que representa a una función conocida, a partir de la gráfica, es utilizar su tabla de valores.

Observa que en la tabla correspondiente al gráfico A, los valores de y son exactamente potencias de 2, cuyos exponentes son los correspondientes valores de x. Es decir, $y = 2^x$. Luego, la expresión algebraica que representa a la función del gráfico A es $f(x)=2^x$ con $x \in$ IR.

Y la expresión algebraica que representa a la función del gráfico B es $f(x)= (1/2)^x$, con $x \in$ IR.

Modelos poblacionales y de interés compuesto

El crecimiento exponencial se introduce con un problema de crecimiento poblacional, tal como a continuación se presenta:

El día de Año Nuevo del año 2009 la población del mundo era de aproximadamente 6750 millones de personas. Si el ritmo de crecimiento de la población mundial se analiza desde una perspectiva histórica, se observa que después de la Segunda Guerra Mundial se produce una explosión demográfica sin precedentes. Una forma de percibir este efecto es observar cómo ha ido disminuyendo el tiempo transcurrido para que la población mundial se duplique.

Año	Población mundial
600	500 millones
1800	1000 millones
1930	2000 millones
1976	4000 millones

1200 años
130 años
46 años

Tiempo transcurrido para duplicarse

Fuentes: U.S. Census Bureau. www.census.gov/ipc/www/popclockworld.html, Universidad Nacional de Cuyo. www.cricyt.edu.ar/enciclopedia/terminos/PoblacMund.htm. Consultados en julio de 2009.

ANALICEMOS...

- Actualmente, la tasa de crecimiento de la población mundial observada es de 1,2% anual. Si la población sigue creciendo así, ¿en cuánto tiempo alcanzará a 8 mil millones de personas?,
- ¿Cuándo la población alcanzará el doble de habitantes que en 2009?, ¿cómo lo supiste?
- ¿Cómo es la gráfica que representa esta situación? Explica.

ACTIVIDADES

1. Calcula la tasa de interés compuesto anual al que se invierten $ 10 000 000, si al cabo de 2 años produjeron 2 millones de pesos. Verifica tu respuesta utilizando una calculadora científica.

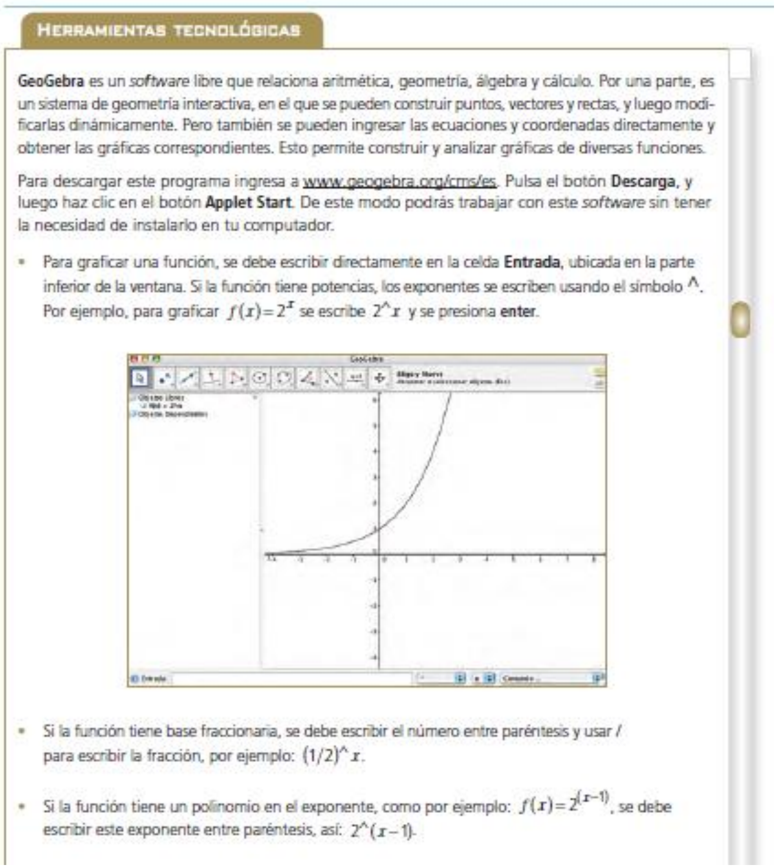
2. Una persona invierte $ 50 000, a una tasa de interés compuesto del 9% anual. Utilizando una calculadora científica, calcula:

   a. ¿cuál es el monto final del capital después de 6 años?
   b. ¿Después de cuánto tiempo su capital ascenderá a $ 118 368?

3. Según los resultados del censo de 2002, la población de Chile es de 15 116 435 habitantes y la tasa de crecimiento, entre el censo de 1982 y el censo de 1992, fue de 1,6% anual. Si la tasa de crecimiento se mantiene en los siguientes 30 años:

   a. ¿cuál será la población en el año 2012?
   b. ¿En cuánto tiempo se habrá duplicado la población?
   c. ¿En qué año la población será de 24 millones de habitantes?

Uso de programa informático



HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

GeoGebra es un *software* libre que relaciona aritmética, geometría, álgebra y cálculo. Por una parte, es un sistema de geometría interactiva, en el que se pueden construir puntos, vectores y rectas, y luego modificarlas dinámicamente. Pero también se pueden ingresar las ecuaciones y coordenadas directamente y obtener las gráficas correspondientes. Esto permite construir y analizar gráficas de diversas funciones.

Para descargar este programa ingresa a www.geogebra.org/cms/es. Pulsa el botón **Descarga**, y luego haz clic en el botón **Applet Start**. De este modo podrás trabajar con este *software* sin tener la necesidad de instalarlo en tu computador.

- Para graficar una función, se debe escribir directamente en la celda **Entrada**, ubicada en la parte inferior de la ventana. Si la función tiene potencias, los exponentes se escriben usando el símbolo ^. Por ejemplo, para graficar $f(x)=2^x$ se escribe 2^x y se presiona **enter**.

- Si la función tiene base fraccionaria, se debe escribir el número entre paréntesis y usar / para escribir la fracción, por ejemplo: (1/2)^x.

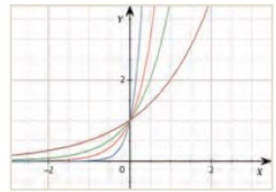
- Si la función tiene un polinomio en el exponente, como por ejemplo: $f(x)=2^{(x-1)}$, se debe escribir este exponente entre paréntesis, así: 2^($x-1$).

Y el software "repara" la continuidad o "invisibiliza" el problema

Caso I:

Caso I: Función exponencial $f(x)=a^x$, con $a>1$. En el sistema de coordenadas se han graficado las siguientes funciones:

$f_1(x)=2^x$, $f_2(x)=4^x$, $f_3(x)=9^x$, $f_4(x)=100^x$



Las gráficas sugieren que:

• El dominio de la función exponencial f(x)=a^x , para los distintos valores de a > 1, son todos los números reales.

• Su recorrido son los números reales positivos.

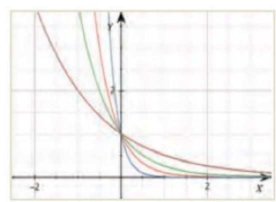
• La función es creciente para todo valor de x, es decir $a^x < a^y$ cuando x < y.

• La gráfica de la función interseca al eje Y en el punto (0, 1). En cambio, es asintótica al eje X.

Caso II

Caso II: Función exponencial $f(x)=a^x$, con $0<a<1$. En el sistema de coordenadas se han graficado las siguientes funciones:

$f_1(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f_2(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $f_3(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^x$, $f_4(x)=\left(\frac{1}{100}\right)^x$



Las gráficas sugieren que:

• El dominio de la función exponencial , con 0<a< 1, son todos los números reales; y el recorrido, los números reales positivos.

• La función es decreciente para todo valor de x, es decir $a^x > a^y$ cuando x < y.

• La gráfica de la función interseca al eje Y en el punto (0, 1). En cambio, es asintótica al eje X.

Cómo “vive” la función exponencial en el liceo

– las funciones exponenciales son introducidas como potencias de exponente (natural) racional y raíces enésimas y como una extensión de las sucesiones geométricas

– es una extensión con *accidente* ligado a la transición discreto → continuo

– Los estudiantes no tienen los conocimientos sobre los números reales para entender lo que está en juego

– Los libros de texto y el profesor deben hacer emerger este accidente usando las representaciones y los artefactos

En la universidad (resumen..)

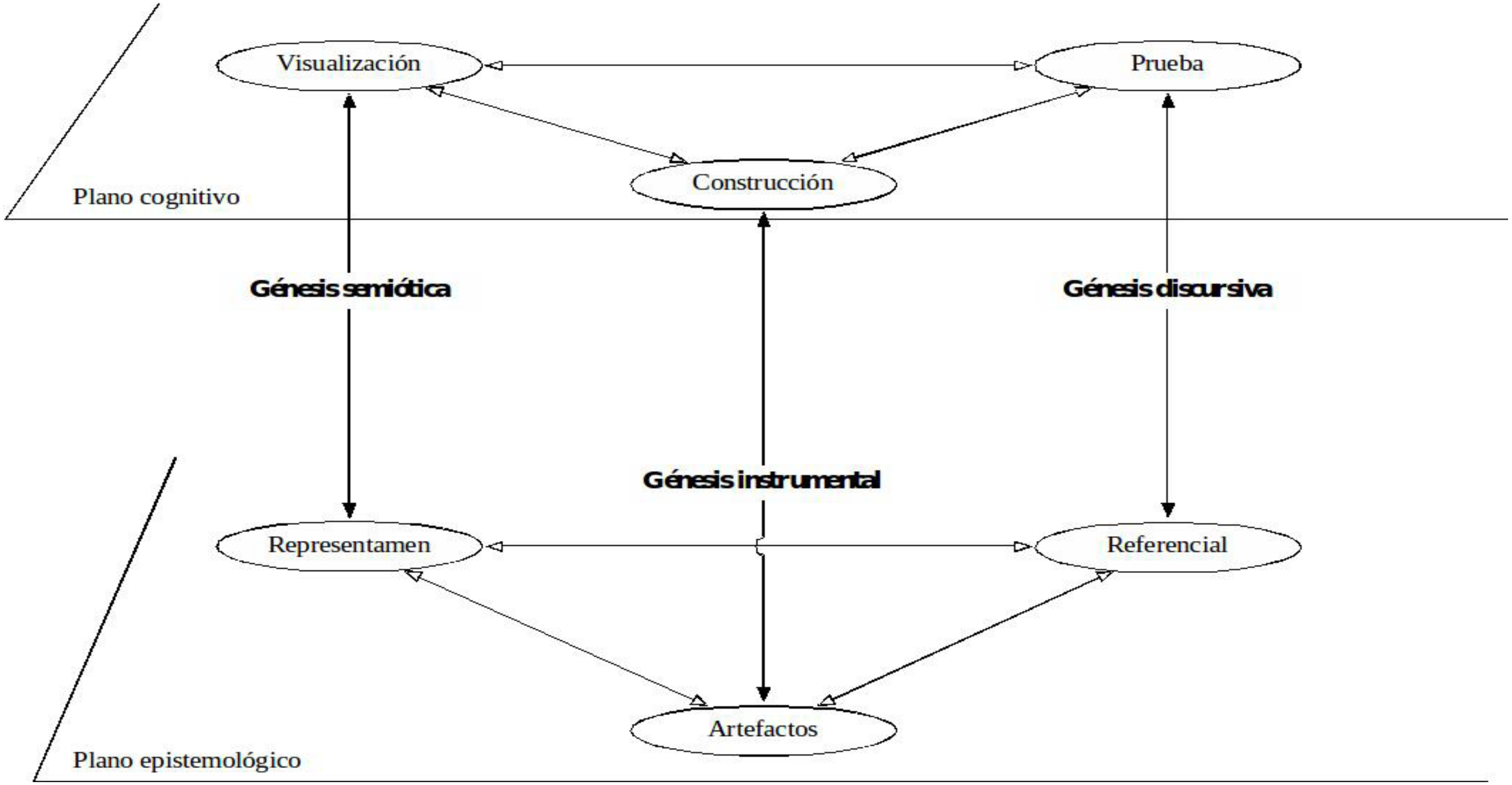
- La función exponencial es un “buen ejemplo” de… funciones continuas, derivables,

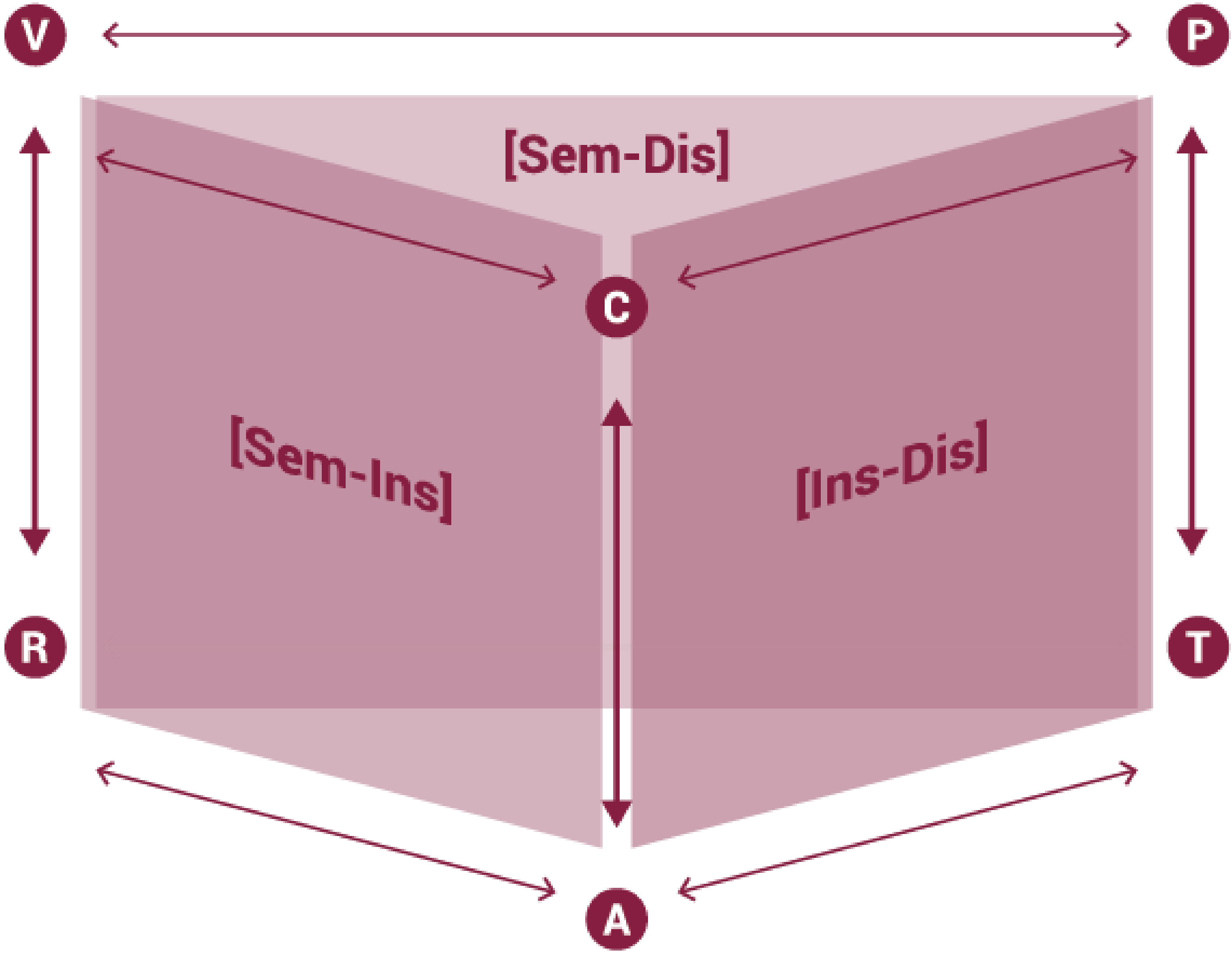
  tratamiento de la convergencia

  una función “buena”

II Elementos teóricos : ETM

Espacio de Trabajo Matemático





Los planos verticales en el ETM (Kuzniak & Richard, 2014)

Diversidad de los espacios de trabajo matemático

- ETM de referencia La organización esperada de este espacio de trabajo es definido idealmente bajo criterios matemáticos, la relación con el saber

- ETM idóneo el cual depende de una institución, y que es definido según la manera que este saber se enseña en la institución con una función específica

- ETM Personal que depende del individuo y definido por la manera que el individuo se enfrenta a un problema matemático, con sus propios conocimientos y capacidades cognitivas.

II.- Construcción…

Intervenir en el ETM personal de profesores durante su formación inicial.

- 15 estudiantes de Chile (5-8 semestre)
- 4 sesiones de clase (1h30)

La propuesta didáctica consta de tres fases en torno a la función exponencial; ellas conectan el ETM de, respectivamente:

las funciones, y las series de polinomios con sus propiedades de continuidad, derivabilidad, funcionalidad,

así como en sus distintas representaciones, y como modelos matemáticos.

III La construcción : la situación aplicada

F1 : trabajo de modelización a partir de problemas “reales” con la finalidad de introducir el estudio de la ecuación funcional

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

F1 : modelación

- precio de venta de una máquina
- el caso del préstamo de una ONG

Situación 2: Precio de venta de una máquina

Una máquina que fabrica corchos para las botellas de vino fue comprada nueva por la suma de U$ $10.000.000. Su tiempo de duración es de 10 años.
Ella puede ser revendida muchas veces y su precio de venta únicamente depende de su tiempo de utilización. La máquina pierde anualmente el 10% de su valor.

Sea $C(t)$ el precio de venta de la máquina en el instante t. Para determinar este valor introducimos la función $p(t) = C(t)/C(0)$, que da cuenta de la pérdida del valor de la máquina.

- Encuentre $p(2)$, $p(5)$ y $p(10)$
- Una primera venta de la máquina interviene al cabo de dos años ($s = 2$) y una segunda tres años después, es decir, después de 5 años ($w = 5$). Encuentre una relación entre $p(s)$, $p(w\text{-}s)$ y $p(w)$.
- En forma general, deduzca una relación posible entre $p(x)$, $p(y)$ y $p(x+y)$ en donde x, y, $x+y$ son fechas arbitrarias comprendidas entre 0 y 10 años y no necesariamente enteras.

Situación 1: El préstamo de una O.N.G. a la caleta Guanaquero

Para levantar la caleta después del tsunami que afecto las costas de Chile una O.N.G., sin fines de lucro, prestó una suma de US$ 1.000.000 a los pescadores de la caleta *Guanaquero*. El pueblo se comprometió a reembolsar regularmente esta suma en función de sus ingresos. Según el contrato la tasa de reembolso anual es del 18% y la proporción de la cantidad reembolsada depende sólo de la duración del período de préstamo. En el caso que se cumplan al menos 4 pagos, al cabo de 10 años la suma restante es ofrecida al pueblo.

Preguntas

Si hacemos un reembolso en el tiempo t, llamamos $q(t)$ al pago y $p(t)$ a la proporción del capital restante del préstamo.

Los líderes del pueblo debaten entre dos opciones para los cinco primeros años, ellas son:

- El primer reembolso al cabo de dos años y el segundo tres años después.
- El primer reembolso al cabo de tres años y el segundo dos años después.

¿Puede ayudarles a tomar una decisión? Deducir por la comparación de $p(2)p(3)$ y $p(3)p(2)$ o sus respectivos $q(t)$.

Por las temporadas de pesca y turismo a los de la caleta les conviene reembolsar una primera suma al cabo de un tiempo x cualquiera (no es necesariamente un período anual) y la segunda al cabo del tiempo $x + y$ ¿Puedes ayudarlo estableciendo una relación entre $p(x)$, $p(y)$ y $p(x + y)$?.

activación del plano [Sem-Inst],

****

predominio del registro aritmético, y

clasificamos el trabajo de los estudiantes en el paradigma AG.

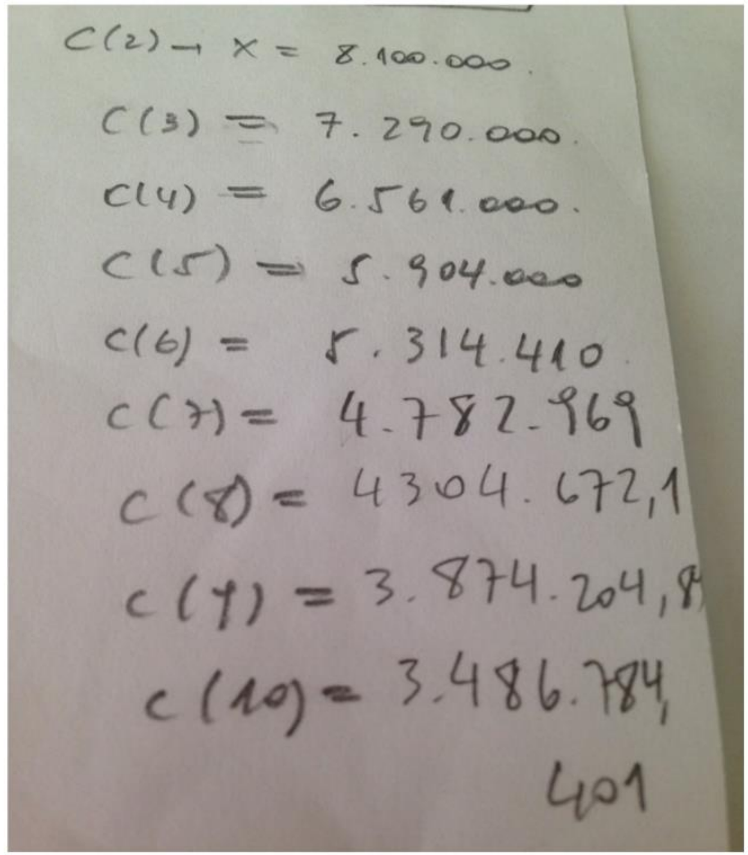

C(2) → x = 8.100.000.
C(3) = 7.290.000.
C(4) = 6.561.000.
C(5) = 5.904.000
C(6) = 5.314.410.
C(7) = 4.782.969
C(8) = 4304.672,1
C(9) = 3.874.204,8
C(10) = 3.486.784,
401

Figura 2 : Producción grupo 4, problema de la fábrica

F2 : trabajo procura identificar las soluciones no constantes e identificar propiedades de la función que cumple con (*)

problemas de la continuidad, la derivabilidad y los enlaces con la gráfica (la dialéctica discreto/continuo).

$p(xy)=p(x)p(y)$

(*) : $p(xy)=p(x)p(y)$

a) Grupo 1 : Muestre que $f(0) = 1$ y que $f(x)>0$ para todo $x \in \mathbf{R}$,
¿Qué valores toma f cuando x es muy grande?
¿Cerca de menos infinito? ¿Cómo es el gráfico de f?

b) Grupo 2 : Es la función f ¿continua en 0?, Suponiendo que es continua en cero
¿En qué otros puntos es continua?
¿Cómo es el gráfico de f?

c) Grupo 3 : Suponiendo que la función f es derivable en 0, es la función f derivable en otros puntos?
¿ f es derivable en 0 ?
¿Cómo es el gráfico de f ?

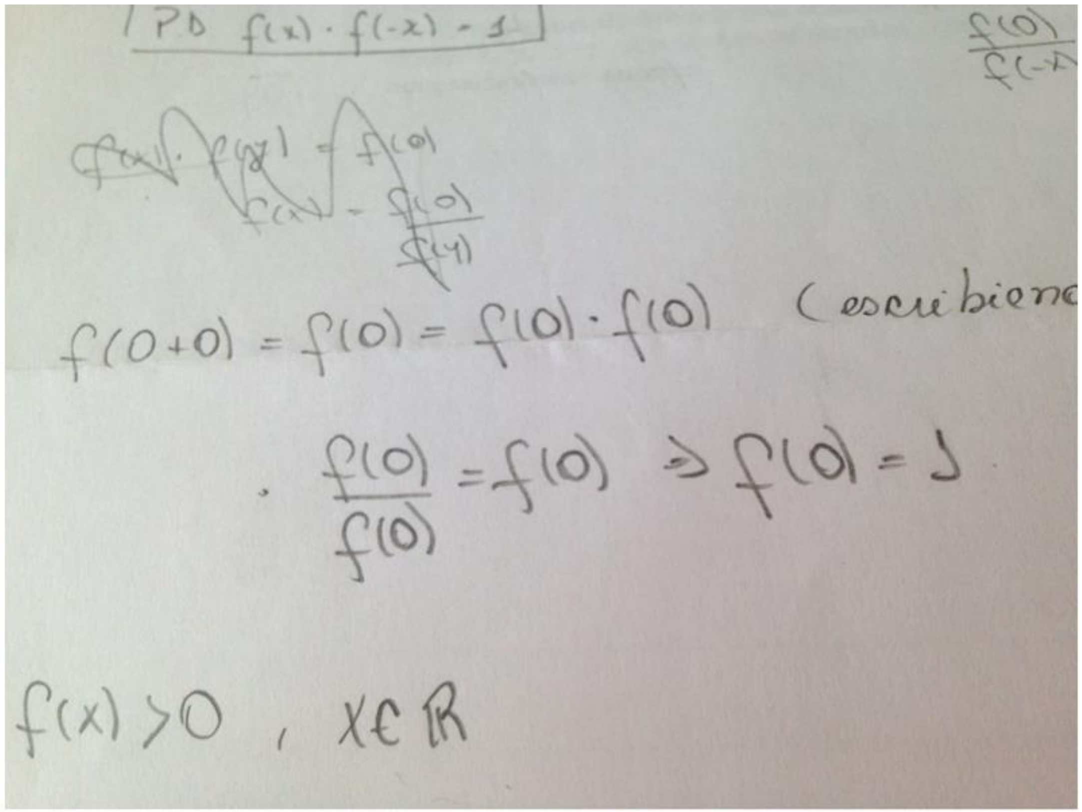
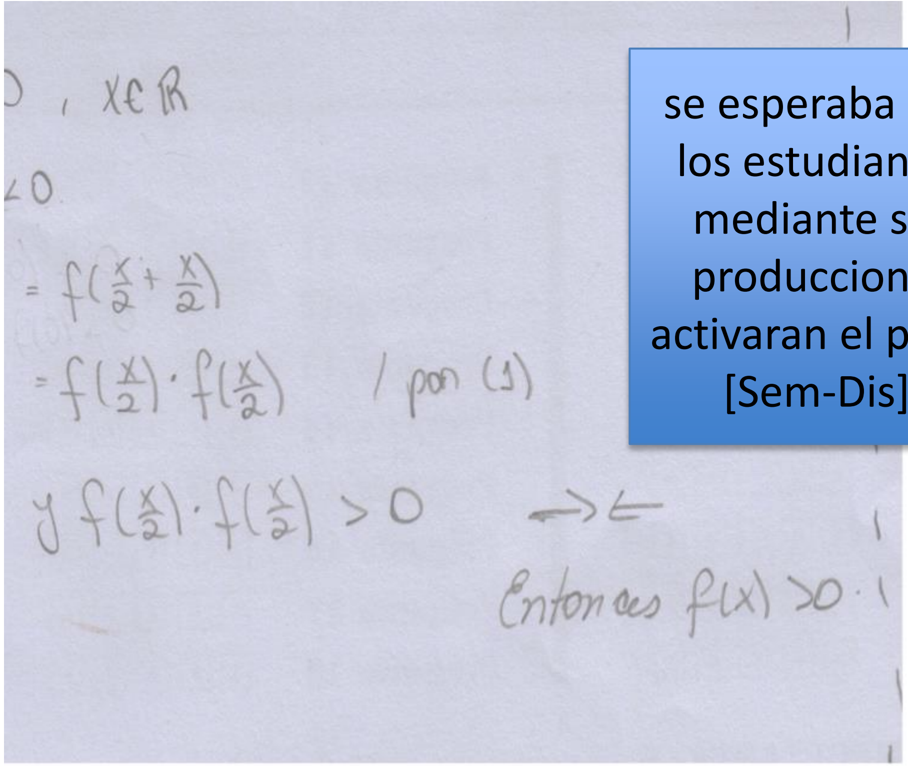


Figura 3 : Respuesta de G1-i



se esperaba que los estudiantes mediante sus producciones activaran el plano [Sem-Dis],

Pd $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$

Sea $f(x) < 0$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) \quad \text{/Por (1)}$$

$$= f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right)$$

y $f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right) > 0$

Entonces $f(x) > 0$

Figura 3 : Respuesta y transcripción de G1-ii

IV Algunas conclusiones

Conclusiones ..

1) Propiedades luego la función

interesante abordar la función exponencial en forma inversa a la habitual, es decir, estudiar en primer lugar sus propiedades (funcionalidad, continuidad, derivabilidad) y posteriormente explicitar la función propiamente tal.

No todos los estudiantes reconocían que la ecuación funcional (*) como exclusiva de la función exponencial

2. Importancia del proceso de modelación (modelización)

Los datos nos mostraron que es difícil integrar las dimensiones de la función exponencial, que son tratadas en forma parcelada; que el ETM personal de los profesores en formación en el caso de la función exponencial está desarticulado

- pero que a través de un proceso de modelación se pueden levantar preguntas matemáticas en relación a las propiedades de que deberían ser probadas.

3. Fenómeno de un objeto en "transición" institucional

Se puede redescubrir la función exponencial como una gráfica con ciertas propiedades, pero en ambos casos tenemos el mismo tipo de dificultades que señalamos a continuación, que tiene que ver con la existencia de la función exponencial:

- desde momento en que el estudiante identifica que se trata de la función exponencial, deja de cuestionarse y pierden sentido las tareas a realizar; por ejemplo, la función pasa a ser continua, y el alumno no cuestiona este hecho.

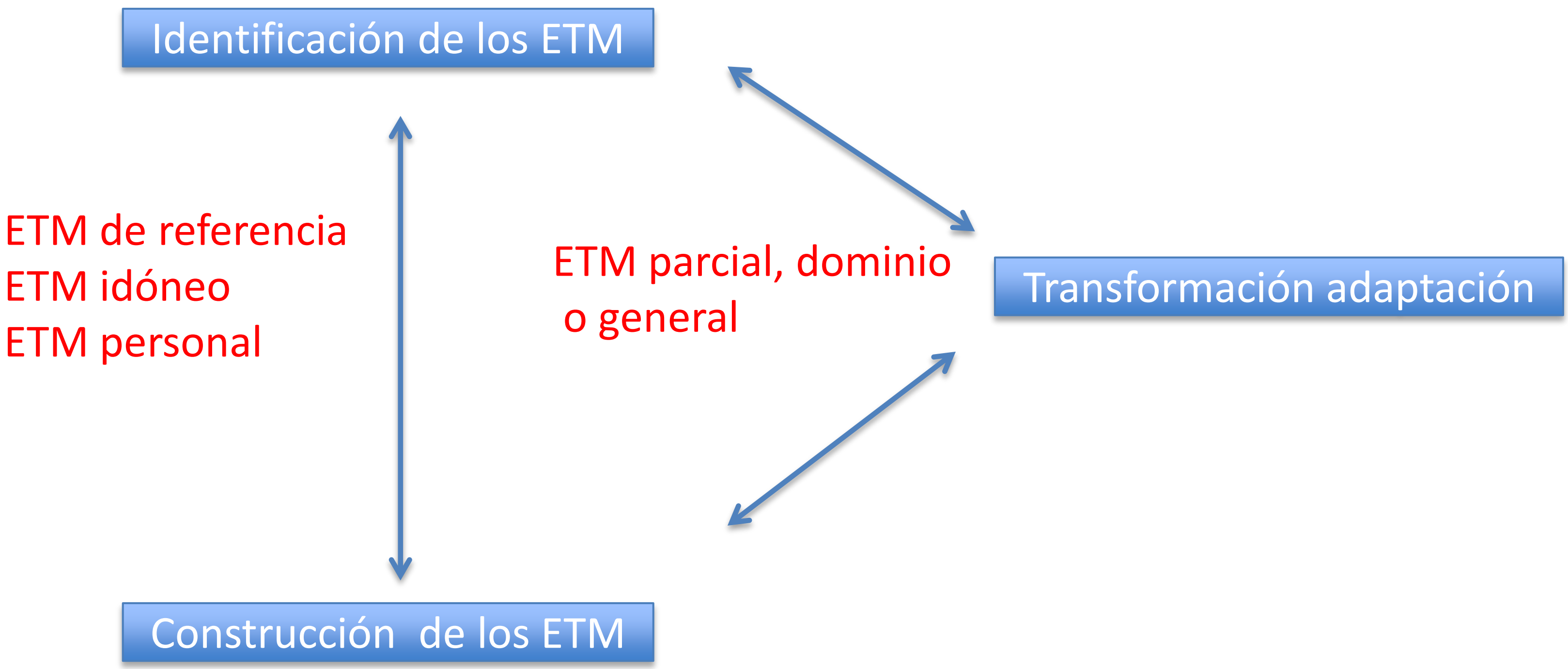
Interrogantes…

- ¿por qué la modelación resulta difícil para los estudiantes?. Si finalmente son pocos los modelos que se estudian, ¿querrá esto decir que ese trabajo matemático no fue realizado o no resultó significativa para ellos durante su formación?

- El fenómeno de la dialéctica discreto-continuo no se repara con el proceso de modelación (o con problemas de modelización), puesto que el efecto de la visualización es hacer *pensar* en la continuidad de la exponencial, pero el modelo mismo no tiene cómo justificar la continuidad.

Gracias …

Identificación y construcción de los ETM en el análisis



(Derouet, Menares, Rousse, Verdugo, Gaona, Loeng, Gamboa).

Referencias Bibliográficas

- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del Análisis Elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *1*, 40-55.

- Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 17(1), 1-16.

- Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9-24.

- Maschietto, M. (2002). *L'enseignement de l'analyse au lycée: les débuts du jeu global/local dans l'environnement de calculatrices.* Thèse doctorale, Université Paris VII.

- Montoya-Delgadillo, E, Mena-Lorca, A., y Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, *17* (4-I), 181-198.

- Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, *ZDM*, (March), 1-16.

F3 : se enfrentó al estudiante a una aproximación fuertemente gráfica usando el software Geogebra.

$(1+x/n)^n$, la función exponencial, el polinomio de Taylor en torno al 0 para la función exponencial,

y crear la necesidad de analizar el comportamiento local y global de estas funciones.

Activamos el plano [Sem-Ins]

Sin embargo, fue labor nuestra y provocar una circulación hacia el plano [Sem-Dis] y al [Ins-Dis].

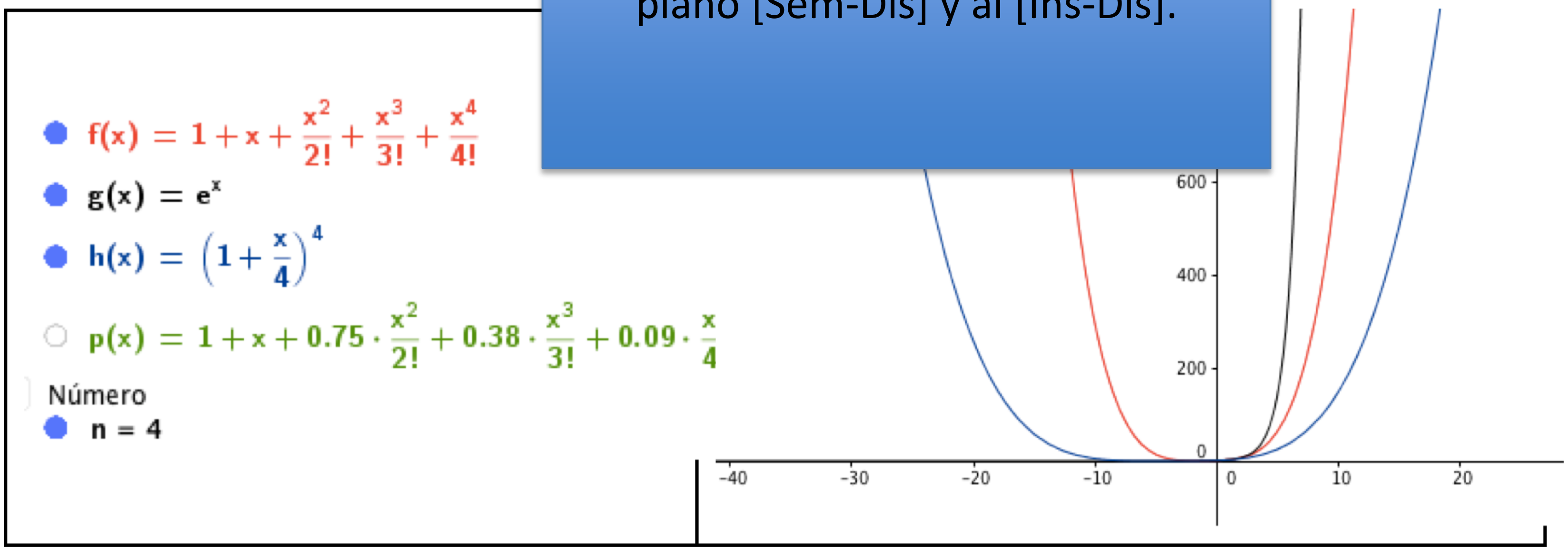


Figura 5 : “Pantallazo” de gráficas para n = 4